

Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents.

C. Noot-Huyghe

24 septembre 2004

Table des matières

1 Opérateurs différentiels arithmétiques.	2
2 Propriétés des faisceaux d'opérateurs différentiels localisés à coefficients surconvergents.	10
3 Dimension homologique.	15
4 Structure de l'algèbre $A_N(K)^\dagger$.	21

Introduction.

Soient V un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques $(0, p)$ ($p > 0$), K son corps des fractions. On considère le schéma formel $\mathcal{S} = \text{Spf}V$, \mathcal{X} un schéma formel lisse sur \mathcal{S} , de dimension N , et Z , un diviseur de la fibre spéciale de \mathcal{X} . Dans cette situation, P. Berthelot introduit le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ et sa version à pôles surconvergents le long du diviseur Z , noté $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$. Un des résultats de l'article de Berthelot [4] est la finitude de la dimension homologique des faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$, dans le cas où il n'y a pas de pôles. Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ joue aussi un rôle important dans la théorie des \mathcal{D} -modules arithmétiques, parce qu'il permet de construire une théorie de la transformation de Fourier des \mathcal{D} -modules arithmétiques, et qu'il est un cadre naturel pour la définition des fonctions L associées aux \mathcal{D} -modules arithmétiques (cf. la thèse de D. Caro [5]). Nous montrons ici que le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ est de dimension homologique finie. En utilisant des propriétés de platitude données dans la dernière partie de cet article, la même démonstration donne la finitude de la dimension homologique de la complétée faible de l'algèbre de Weyl. Nous complétons cette partie par des résultats sur l'action du Frobenius sur cette algèbre.

Le résultat pour la complétée faible de l'algèbre de Weyl $A_N(K)^\dagger$ complète le travail de L. Narvaez-Macarro ([13]), dont il ne se déduit pas. Le résultat pour $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ a

déjà été utilisé. Il permet par exemple, dans le cadre de la transformation de Fourier, d'appliquer les résultats sur l'image directe propre démontrés par A. Virrion ([15]) et d'énoncer le théorème de comparaison entre la transformation de Fourier avec support et sans support pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques ([8]). Ces résultats devraient aussi permettre de préciser l'équivalence de catégories énoncée dans [7].

Rappelons que le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ est limite inductive d'algèbres d'opérateurs différentiels complètes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ et que tout relèvement du Frobenius sur \mathcal{X} induit une équivalence de catégories entre les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents et les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -modules cohérents. Le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients surconvergents le long d'un diviseur est construit comme limite inductive de faisceaux d'anneaux complets $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$, où $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ est une algèbre complète topologiquement de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. Dans le cas où il n'y a pas de pôles surconvergents, la finitude de la dimension homologique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ résulte de la finitude de la dimension homologique des anneaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$. Pour montrer la finitude de la dimension homologique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$, on se ramène à montrer la finitude de la dimension de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(0)}$ via l'équivalence de catégories définie par le Frobenius. Le point clef est que le gradué de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ pour la filtration p -adique est isomorphe à une algèbre de polynômes en une variable, à coefficients dans $\mathcal{D}_{X_0}^{(0)}$, qui est une algèbre classiquement de dimension homologique finie. L'un des problèmes dans le cas où l'on rajoute des pôles surconvergents le long de Z est que le gradué associé à la filtration p -adique n'est pas régulier, du fait que l'algèbre $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ n'est pas intègre modulo p . Pour remédier à ce problème, on introduit des coefficients à pôles algébriques le long du diviseur Z contenant les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et qui sont munis d'une action du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. On construit à partir de là des faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{E}^{(m)}$ faiblement complets, dont la limite inductive tensorisée par K est isomorphe à $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ et qui sont de dimension homologique finie. Cela montre la finitude de la dimension homologique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$. Une démonstration analogue donne la finitude de la dimension homologique de $A_N(K)^\dagger$.

Enfin, c'est une question naturelle d'exhiber sur l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ une structure analogue à celle du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$. Nous traitons cette question dans la dernière partie de cet article, en montrant que l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ est limite inductive d'algèbres faiblement complètes, de dimension homologique finie, ayant de bonnes propriétés de platitude et jouissant de bonnes propriétés vis-à-vis du Frobenius.

Je remercie B. Le Stum et D. Caro pour leurs remarques concernant une version préliminaire de cette article.

1 Opérateurs différentiels arithmétiques.

Dans toute la suite de l'article, nous reprenons les notations de l'introduction. Précisons de plus, que si \mathcal{E} est un faisceau de \mathbf{Z} -modules, $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ est par définition le faisceau \mathcal{E} tensorisé par le corps des nombres rationnels \mathbf{Q} .

1.1 Généralités à propos des opérateurs différentiels arithmétiques.

Il ne s'agit ici que de rappels de résultats de Berthelot ([3] et [4]).

Si le diviseur Z se relève en un diviseur \mathcal{Z} de \mathcal{X} , on note \mathcal{U} le complémentaire de \mathcal{Z} dans \mathcal{X} et j l'immersion ouverte de \mathcal{U} dans \mathcal{X} . Soit π une uniformisante de V , la fibre spéciale des schémas formels considérés sera notée avec une lettre droite indexée par 0 (X_0 est la fibre spéciale de \mathcal{X}).

Si k est un entier, $v_p(k)$ est sa valuation p -adique et $q_k^{(m)}$ désigne le quotient de la division euclidienne de k par p^m . Si $\underline{k} = (k_1, \dots, k_N)$ est un multi-indice, on note $|\underline{k}| = k_1 + \dots + k_N$ et

$$q_{\underline{k}}^{(m)}! = \prod_i q_{k_i}^{(m)}!.$$

1.1.1 Descriptions intrinsèques.

Nous aurons besoin des constructions de Berthelot pour décomposer l'action du Frobenius sur la complétée faible de l'algèbre de Weyl. Cependant, nous omettrons de préciser que toutes les m -PD-algèbres considérées ici seront munies de m -PD-structures compatibles à p . Les m -PD-algèbres sont des PD -algèbres et une 0-PD-structure est en fait une PD-structure.

On décrit ici la situation sans pôles surconvergents le long de Z . Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ le voisinage à puissances divisées partielle de niveau m , d'ordre n compatible à p : c'est un quotient de l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m compatibles à p de l'idéal diagonal \mathcal{I} de \mathcal{X} (cf 1.4 de [3]), l'idéal définissant l'immersion fermée $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Ce faisceau $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ est muni de deux structures de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules, à gauche et à droite, qui correspondent respectivement à la multiplication par $x \otimes 1$ ou par $1 \otimes x$ si x est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. On munit $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ de la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module à gauche et on pose

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}), \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \varinjlim_n \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}.$$

Une description en coordonnées locales des opérateurs différentiels sera donnée dans la sous-section suivante. On retrouve la construction usuelle des opérateurs différentiels en posant $m = +\infty$. Dans ce cas, on voit que $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(\infty)}^n = \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} / \mathcal{I}^{n+1}$.

Soient x_1, \dots, x_N des coordonnées locales sur un ouvert \mathcal{V} de \mathcal{X} , $\xi_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}}$ pour tout $1 \leq i \leq N$, alors (1.5.3 de [3]) le faisceau $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre de base

$$\xi_{\underline{k}}^{\{k\}(m)} = \xi_1^{\{k_1\}(m)} \dots \xi_N^{\{k_N\}(m)},$$

où ces éléments vérifient la relation

$$q_{k_i}^{(m)}! \xi_i^{\{k_i\}(m)} = \xi_i^{k_i}.$$

1.1.2 Description en coordonnées locales des opérateurs différentiels.

Nous aurons besoin d'une description en coordonnées locales des faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Pour les justifications des affirmations qui suivent, nous renvoyons à [3]. Si \mathcal{V} est un ouvert de \mathcal{X} muni de coordonnées locales x_1, \dots, x_N , le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{(m)}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -module libre de base les

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)} = \prod_i \partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle (m)},$$

où les opérateurs $\partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle (m)}$ vérifient la relation

$$\frac{k_i!}{q_{k_i}^{(m)}!} \partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle (m)} = \partial_{x_i}^{k_i},$$

l'opérateur ∂_{x_i} étant la dérivation usuelle par rapport à x_i . Rappelons que le faisceau des opérateurs différentiels usuel (cf 16.8 de [1]) est le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module libre de base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ tels que $\underline{k}! \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$.

Inégalités. Nous utiliserons aussi les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \underline{k} \rangle}{p-1} - N \log_p(\langle \underline{k} \rangle + 1) - N &\leq v_p(\underline{k}!) \leq \frac{\langle \underline{k} \rangle}{p-1}, \\ \frac{\langle \underline{k} \rangle}{p^m(p-1)} - N \log_p(\langle \underline{k} \rangle + 1) - \frac{Np}{p-1} &\leq v_p(q_{\underline{k}}^{(m)}!) \leq \frac{\langle \underline{k} \rangle}{p^m(p-1)}. \end{aligned}$$

Formules. La proposition 2.2.4 de [3] donne quelques formules. Nous aurons besoin de celle qui suit. Ici, f est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et on définit

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{array} \right\}_{(m)} &= \frac{q_{\underline{k}}^{(m)}!}{q_{\underline{k}'}^{(m)}! q_{\underline{k}''}^{(m)}!}, \\ \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)} \cdot f &= \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{array} \right\}_{(m)} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}' \rangle (m)}(f) \underline{\partial}^{\langle \underline{k}'' \rangle (m)} \end{aligned} \quad (1)$$

Enfin, nous utiliserons les coefficients suivants définis par Berthelot. Dans les formules, m est un entier naturel fixé et k et k' sont deux entiers. Alors on pose

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ k' \end{array} \right\}_{(m)} = \frac{q!}{q'! q''!},$$

et pour deux multi-indices \underline{k} et \underline{k}' , on pose

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{array} \right\}_{(m)} = \prod_i \left\{ \begin{array}{c} k_i \\ k'_i \end{array} \right\}_{(m)}.$$

Ensuite, on définit

$$\left\langle \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{array} \right\rangle_{(m)} = \binom{\underline{k}}{\underline{k}'}_{(m)} \left\{ \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{array} \right\}_{(m)}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)},$$

d'après 1.1.2 de [3].

1.1.3 Description intrinsèque de la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à gauche.

Dans la suite, nous omettrons de préciser la valeur de m quand celle-ci sera claire. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module, une m -PD-stratification (cf 2.3 de [3]) sur \mathcal{E} est la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ -linéaires

$$\varepsilon_n : \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E} \simeq \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n,$$

vérifiant certaines propriétés et où les produits tensoriels sont respectivement pris pour les structures de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules droites et gauches de $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$. La donnée d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module sur \mathcal{E} équivaut à la donnée d'une m -PD-stratification sur \mathcal{E} . Si \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à gauche, les flèches ε_n sont définies en coordonnées locales, par $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ -linéarité, à partir des flèches $\theta_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$, définies comme suit

$$\theta_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \underline{\partial}^{(k)}(x) \otimes \underline{\xi}^{\{k\}}.$$

1.1.4 Description intrinsèque de la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à droite.

Nous reprenons ici les résultats de 1.1.3 de [3]. Le faisceau $p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ désigne le faisceau $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ vu comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module à gauche et le faisceau $p_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ le même faisceau vu comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module à droite. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module, une m -PD-costratification sur \mathcal{E} est la donnée d'une famille d'isomorphismes $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ -linéaires ε_n , vérifiant certaines conditions,

$$\varepsilon_n : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(p_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n, \mathcal{E}).$$

Il est équivalent de se donner une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à droite ou de se donner une m -PD-costratification sur \mathcal{E} .

Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module à droite. On se reportera à 1.1.6.1 de [4] pour avoir une description de ε_n . En coordonnées locales, on peut identifier $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n, \mathcal{E})$ à $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$ et $\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{(k)})(1) = x \underline{\partial}^{(k)}$.

1.1.5 Frobenius, $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules à droite et à gauche.

Soit σ le Frobenius absolu sur $\text{spec } k$, et X'_0 le produit fibré au-dessus de σ

$$X_0 \times_{\text{spec } k} \text{spec } k.$$

Soit \mathcal{X}' un schéma formel dont la fibre spéciale est isomorphe à X'_0 , tel qu'il existe un homomorphisme de schémas formels $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ relevant l'homomorphisme de Frobenius relatif : $X_0 \rightarrow X'_0$. On note F^{-1} l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Si \mathcal{E}' est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -module, on note

$$F^*\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}',$$

$$F^{\flat}\mathcal{E} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{E}').$$

En 2.2.2 de [4], Berthelot montre que F^* induit un PD -morphisme :

$$\Phi : F^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)},$$

et en déduit des applications au niveau des voisinages infinitésimaux

$$\Phi_n^* : F^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}^n \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n.$$

Si \mathcal{E}' est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -module à gauche donné par une m - PD -stratification sur \mathcal{X}' définie par les isomorphismes ε_n , $F^*\mathcal{E}'$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à gauche, dont une $(m+1)$ - PD -stratification est donnée par les isomorphismes $\Phi_n^*\varepsilon_n$.

Si \mathcal{E}' est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -module à droite donné par une m - PD -costratification sur \mathcal{X}' définie par les isomorphismes ε_n , $F^b\mathcal{E}'$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à gauche, dont une $(m+1)$ - PD -costratification est donnée par les isomorphismes $\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}}(\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}, \varepsilon_n)$.

1.1.6 Opérateurs différentiels à pôles surconvergents.

Les définitions qui suivent sont dues à Berthelot (cf 4.2 de [3]). Soit Z un diviseur de Cartier de X_0 , localement donné par une équation f de \mathcal{O}_{X_0} . Cette équation se relève en une section locale encore notée f de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sur un ouvert \mathcal{V} de \mathcal{X} . En restriction à \mathcal{V} on pose alors

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T] / f^{p^{m+1}}T - p,$$

et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ son complété p -adique.

Ceci définit en fait un faisceau, qui ne dépend pas du choix du relèvement de f , ni du choix de f . Ce faisceau est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module, de sorte que le faisceau

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$$

est muni d'une structure de faisceau de $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -algèbres (en appliquant la règle de Leibnitz pour effectuer le produit de 2 éléments). Le complété p -adique de ce faisceau est noté $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ (ou parfois $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$). On considérera aussi tous les faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ pour $m' \geq m$ et la limite inductive des ces faisceaux pour m' variable notée $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(Z)$.

Enfin, on introduit

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger Z) = \lim_{\rightarrow m} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z).$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\dagger Z)$ est cohérent.

On note j l'inclusion de $X_0 \setminus Z \subset X_0$. Si le diviseur Z se relève globalement en un diviseur \mathcal{Z} , et si \mathcal{U} est l'ouvert complémentaire du diviseur \mathcal{Z} , tous les faisceaux considérés sont isomorphes sur \mathcal{U} respectivement à $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{(m)}$ et à $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{\dagger}$, et on note encore j l'inclusion $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$.

Pour décrire plus précisément les faisceaux $\mathcal{B}^{(m)}$ qui interviennent dans la définition des opérateurs différentiels à coefficients surconvergents, nous aurons besoin de l'application $\nu_m : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, définie comme suit. Soient $k \in \mathbf{N}$, q et r , le quotient et le reste

de la division euclidienne de k par p^{m+1} . Si $r = 0$, on pose $\nu_m(k) = q$. Si $r \neq 0$, on pose $\nu_m(k) = q + 1$. Pour un multi-indice $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, on pose $\nu_m(\underline{k}) = \sum_{i=1}^N \nu_m(k_i)$. Soit f relève une section locale du diviseur Z . Une condition suffisante pour qu'une section locale de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, a/f^n avec $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, soit dans $\mathcal{B}^{(m)}$ est que $a \in p^{\nu_m(n)}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

Inégalités. Mentionnons enfin les encadrements :

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(\underline{l}) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + N,$$

$$0 \leq \nu_m(\underline{k}) - \nu_m(|\underline{k}|) \leq N.$$

1.1.7 Un sous-faisceau du faisceau des opérateurs différentiels à pôles surconvergents.

Ce faisceau est introduit pour étudier le faisceau des opérateurs différentiels à pôles surconvergents dans le cas de l'espace projectif.

Soit W un ouvert de \mathcal{X} , $W' \subset W$ un ouvert muni de coordonnées locales x_1, \dots, x_N tels que les opérateurs différentiels $\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$ relatifs aux coordonnées x_i soient des sections globales sur W du faisceau $\mathcal{D}_W^{(m)}$ pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$ et tout entier m . On peut alors introduire (cf [7]) un sous-faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{A}_W^{(m)}(Z)$ de $\widehat{\mathcal{D}}_W^{(m)}(Z)$ défini sur un ouvert \mathcal{Y} de W par

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(Z) = \bigoplus_{\underline{k}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)} \underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}},$$

$\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z)$ son complété p -adique, $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z)$ le complété p -adique du faisceau

$$\widehat{\mathcal{B}}_W^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_W^{(m)}} \mathcal{A}_W^{(m)}(Z),$$

et $\mathcal{A}_W^{\dagger(m)}(Z)$ la limite inductive

$$\lim_{\rightarrow m'} \widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z).$$

On note enfin $\mathcal{A}_W^{\dagger}(Z)$ la limite inductive

$$\lim_{\rightarrow m} \mathcal{A}_W^{\dagger(m)}(Z).$$

Pour $W' = W$, le faisceau $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z)$ coïncide avec le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_W^{(m)}(Z)$.

L'exemple important qui sera utilisé ici est le cas de l'espace projectif. Soit $\mathcal{X} = \widehat{\mathbf{P}}_V^N$, muni du diviseur à l'infini noté ∞ et x_1, \dots, x_N les coordonnées sur l'espace affine \mathcal{U} complémentaire du diviseur à l'infini. Les opérateurs $\underline{\partial}^{(\underline{k})^{(m)}}$ relativement à ces coordonnées sont des sections globales de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}})$ pour tout m et tout \underline{k} . On introduit alors $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ comme précédemment, $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ les faisceaux obtenus en complétant p -adiquement et $\mathcal{A}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ la limite inductive sur m des faisceaux complétés, tensorisée par \mathbf{Q} . Le point est qu'il existe un isomorphisme canonique ([7])

$$\mathcal{A}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty).$$

D'autre part, un calcul facile montre que

$$\widehat{B}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) = \left\{ \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \mid v_{\pi}(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|) \text{ et } v_{\pi}(a_{\underline{l}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \rightarrow \infty \text{ si } |\underline{l}| \rightarrow \infty \right\}.$$

1.1.8 Une version localisée du faisceau des opérateurs différentiels à pôles surconvergents.

Ce faisceau est déjà utilisé dans 2.2 de [10]. On commence par définir le faisceau de coefficients localisé. Soit f une section locale sur un ouvert W de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, relevant une équation locale de Z . En restriction à W on pose

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/f].$$

On remarque (2.2.1.1 de [11]) que cette construction ne dépend pas du choix de f et que ceci définit un faisceau. De plus, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)} \subset \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \subset \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) \subset j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\widehat{*}Z) &= \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z), \mathcal{D}^{\dagger}(\dagger *Z) = \lim_{\rightarrow m} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\widehat{*}Z), \\ \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z) &= \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}(*Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z), \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z) = \lim_{\rightarrow m' \geq m} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de 1.1.7, en supposant de plus que $W \cap \mathcal{U} \subset W'$, on définit de façon analogue

$$\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(*Z) = \widehat{\mathcal{B}}_W^{(m)}(*Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_W^{(m)}} \widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z),$$

ainsi que les faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$ et $\mathcal{A}_W^{\dagger(m)}(*Z)$.

Nous démontrerons dans la sous-section suivante que ces faisceaux sont munis d'une structure de faisceau d'algèbres. Signalons enfin quelques isomorphismes qui vont jouer un rôle clef pour le finitude de la dimension homologique. Après un calcul local, on voit facilement que

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z)/\pi\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) \simeq j_*\mathcal{O}_{U_0}.$$

On en déduit des isomorphismes

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\widehat{*}Z)/\pi\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\widehat{*}Z) \simeq j_*\mathcal{D}_{U_0}^{(m)},$$

pour $m' \geq m$, des isomorphismes

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)/\pi\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z) \simeq j_*\mathcal{D}_{U_0}^{(m)},$$

et enfin,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)/\pi\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z) \simeq j_*\mathcal{D}_{U_0}^{(m)}.$$

Avec les notations de 1.1.7, et si $W \cap \mathcal{U} \subset W'$ alors on a l'isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(*Z)/\pi\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(*Z) \simeq j_*\mathcal{D}_{(\mathcal{U} \cap W)_0}^{(m)}.$$

En particulier, pour le cas de l'espace projectif on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*\infty)/\pi\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*\infty) &\simeq j_*\mathcal{D}_{\mathcal{U}_0}^{(m)}, \\ \mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*\infty)/\pi\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*\infty) &\simeq j_*\mathcal{D}_{\mathcal{U}_0}^{(m)}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1.9. *Soit h une section locale de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ tel que $\pi^i h$ soit une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ pour un certain entier i , alors h est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.*

Démonstration. L'assertion est locale et on suppose que l'on est sur un ouvert sur lequel f relève une équation de Z . On procède par récurrence sur i . Si $i = 0$, l'assertion est triviale. Supposons qu'elle soit vraie pour tout $n \leq i$ et toute section h de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Considérons une section locale h de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ telle que $\pi^{i+1}h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Du fait que f n'est pas diviseur de zéro modulo π , on a une inclusion

$$\mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{\alpha} j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\pi j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}.$$

Posons $k = \pi^{i+1}h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et \bar{k} sa classe modulo π . Par hypothèse, $\alpha(\bar{k}) = 0$ et $\bar{k} = 0$, ce qui signifie que $\pi^{i+1}h \in \pi\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est sans torsion, cela implique que $\pi^i h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et on conclut par récurrence.

Le résultat clé est le suivant. On suppose que l'on est sur un ouvert W , muni de coordonnées locales, tel que f relève une équation de $Z \cap W_0$.

Lemme 1.1.10. *Soit M un entier naturel, \underline{k} un multi-indice de longueur N .*

- (i) *Il existe une section $h_{\underline{k},M} \in \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$, telle que $\underline{\partial}^{(\underline{k})} f^{(-M)} = q_{\underline{k}}! h_{\underline{k},M} f^{-M-|\underline{k}|}$.*
- (ii) *Si $|\underline{k}| \leq M$, il existe une section $h_{\underline{k},M} \in \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ telle que $\underline{\partial}^{(\underline{k})} f^M = q_{\underline{k}}! h_{\underline{k},M} f^{M-|\underline{k}|}$.*
- (iii) *Si $|\underline{k}| > M$, il existe une section $h_{\underline{k},M} \in \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ telle que $\underline{\partial}^{(\underline{k})} f^M = q_{\underline{k}}! h_{\underline{k},M}$.*

Démonstration. Le (iii) résulte du fait que \mathcal{O}_W est un \mathcal{D}_W -module. Les démonstrations de (i) et de (ii) sont analogues. Montrons (i). Par récurrence sur $|\underline{k}|$, on voit facilement que $f^{M+|\underline{k}|} \underline{\partial}^{\underline{k}}(f^{-M})$ est un élément de \mathcal{O}_W . Comme le faisceau $j_*\mathcal{O}_W$ est un \mathcal{D}_W -module, l'élément $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}(f^{-M})$ est dans $j_*\mathcal{O}_W$. On conclut alors en appliquant le lemme précédent à $h_{\underline{k},M} = f^{M+|\underline{k}|} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}(f^{-M})$.

Nous gardons les hypothèses précédentes pour la proposition qui suit. Cette proposition est valable si on remplace $\mathcal{D}^{(m)}(Z)$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ respectivement par $\mathcal{A}_W^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}$ sous les hypothèses de 1.1.7.

Proposition 1.1.11. *Fixons m' un entier tel que $m' \geq m$.*

- (i) *Il existe un entier b tel que, pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$ et tout entier positif M ,*

$$f^{M+b} \underline{\partial}^{(\underline{k})} f^{-M} \in \mathcal{D}_W^{(m)}(Z) \quad (\text{resp. } \widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z)).$$

(ii) Il existe un entier b tel que, pour tout entier positif M ,

$$f^{M+b}\mathcal{D}_W^{(m)}(Z)f^{-M} \subset \mathcal{D}_W^{(m)}(Z) \quad (\text{resp. } f^{M+b}\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z)f^{-M} \subset \widehat{\mathcal{A}}_W^{(m)}(Z)).$$

(iii) Il existe un entier b tel que, pour tout entier positif M ,

$$f^{M+b}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)f^{-M} \subset \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z) \quad (\text{resp. } f^{M+b}\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z)f^{-M} \subset \widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z)).$$

Démonstration. Reprenons les résultats du lemme précédent. Pour tout entier b , tout $M \geq 0$, il existe des sections locales $h_{\underline{k},M}$ de \mathcal{O}_W telles qu'on ait les égalités

$$f^{M+b}\underline{\partial}^{(\underline{k})_{(m)}}(f^{-M}) = q_{\underline{k}}!h_{\underline{k},M}f^{-|\underline{k}|+b}.$$

Soit $-C$ un minorant ($C > 0$), pour tout \underline{k} , de la quantité

$$\frac{|\underline{k}|}{2p^{m+1}(p-1)} - N \log_p(|\underline{k}|+1) - \frac{N(2p-1)}{p-1},$$

et $b = p^{m+1}C$. Par construction, on a l'inégalité, pour tout \underline{k} tel que $|\underline{k}| \geq b$,

$$\nu_p(q_{\underline{k}}!) - \nu_m(|\underline{k}| - b) \geq \frac{|\underline{k}|}{2p^{m+1}(p-1)}.$$

Cela signifie que, pour tout entier positif M et pour tout multi-indice \underline{k} , l'élément $f^{M+b}\underline{\partial}^{(\underline{k})_{(m)}}(f^{-M})$ est en fait une section locale du faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_W^{(m)}$. Le (i) s'en déduit, car, d'après [3], on a

$$f^{M+b}\underline{\partial}^{(\underline{k})_{(m)}}f^{-M} = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} f^{M+b}\underline{\partial}^{(\underline{k}')}(f^{-r})\underline{\partial}^{(\underline{k}'')}.$$

Le (ii) se déduit du (i) par passage à la limite dans le faisceau d'anneaux complets $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$. Tirons-en deux corollaires.

Corollaire 1.1.12. (i) Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger *Z)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger *Z)$ -algèbres.

(ii) Sous les hypothèses de 1.1.7, et si $W \cap \mathcal{U} \subset W'$, alors les faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$ sont des faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}^W(*Z)$ -algèbres.

(iii) Les faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ (resp. $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$) sont des faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$ -algèbres (resp. des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)$ -algèbres).

Donnons quelques propriétés de ces faisceaux.

2 Propriétés des faisceaux d'opérateurs différentiels localisés à coefficients surconvergents.

Pour le corollaire suivant, nous aurons besoin d'un lemme, qui est une variante, pour les opérateurs différentiels, du lemme 2.2.2 de [11] pour les coefficients surconvergents. Reprenons les hypothèses de l'introduction.

Lemme 2.1. *On a l'égalité*

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(Z) \bigcap_{j_*} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}, \quad (\text{resp. } \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m', m)}(*Z) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m', m)}(Z) \bigcap_{j_*} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}).$$

On a une assertion analogue pour les faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m', m)}(*Z)$.

Démonstration. L'assertion est locale. Il suffit bien sûr de la montrer dans le deuxième cas. Soit W un ouvert de \mathcal{X} muni de coordonnées locales, tel que $Z \cap W$ soit défini par une équation $f = 0$, dont on appelle f un relèvement dans $A = \Gamma(W, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. On note U l'ouvert complémentaire $D(f)$ dans W . Notons encore $D = \Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, qui est un A -module libre car W est muni de coordonnées locales, \widehat{D} le complété p -adique de D , $E = \Gamma(W, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m', m)}(Z))$. Avec ces notations, les modules $\Gamma(W, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m', m)}(*Z))$ et $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ s'identifient respectivement à $E[1/f]$ et à $\widehat{D}\{1/f\}$.

Comme la section f n'est pas diviseur de 0 modulo π , il existe une injection

$$\alpha: A/\pi A \hookrightarrow A[1/f]/\pi A[1/f].$$

Du fait que D est un A module à gauche libre, on a une injection

$$\beta: D/\pi D \hookrightarrow D[1/f]/\pi D[1/f].$$

Soit P un élément de $E_{\mathbf{Q}} \cap \widehat{D}\{1/f\}$. Il existe $a \in \mathbf{N}$ et une décomposition $f^a P = R + S$, avec $S \in E$ et $R \in D_{\mathbf{Q}} \cap \widehat{D}\{1/f\}$. Soit s un entier minimal tel que $\pi^s R \in D$. Si $s \geq 1$, $\beta(\pi R) = 0$, ce qui contredit la minimalité de s . Cela montre finalement que $R \in D$ et que P est un élément de $E[1/f]$, d'où le lemme.

Corollaire 2.2. (i) *Les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger *Z)$ sont des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres faiblement complètes.*

(ii) *Les faisceaux $\mathcal{A}_W^{\dagger(m)}(*Z)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres faiblement complètes.*

Pour la définition de faiblement complet dans le cas non commutatif, nous nous reportons à 1.3 de [11]. Dans cet article, nous montrons que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger *Z)$ est faiblement complet. Etant donné les résultats précédents, la même démonstration marche essentiellement ici. La démonstration de (ii) est la même que celle de (i). Nous montrons donc seulement (i). D'autre part, l'assertion pour $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger *Z)$ découle de l'assertion pour $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(\dagger *Z)$ par passage à la limite inductive.

L'affirmation est locale. Soient P_1, \dots, P_N des sections locales de $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$. Il existe des entiers m' et n tels que $f^n P_i$ soit une section locale de $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m', m)}(Z)$ pour tout i .

Soit \underline{i} un multi-indice de longueur infinie. On pose

$$\underline{P}^{\underline{i}} = P_1^{i_1} \dots P_N^{i_N} P_1^{i_{N+1}} \dots P_N^{i_{2N}} P_1^{i_{2N+1}} \dots P_N^{i_{3N}} \dots$$

Soit $H = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} \underline{P}^{\underline{i}}$, tels que $a_{\underline{i}} \in V$ et il existe une constante c strictement positive telle que $v_{\pi}(a_{\underline{i}}) > |\underline{i}|/c - 1$. Il suffit de montrer que H est une section locale de $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(\dagger *Z)$. D'après le lemme 1.1.11, il existe des sections locales $Q_{\underline{i}}$ de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m', m)}(Z)$ et un entier b tels que

$$\forall \underline{i}, \underline{P}^{\underline{i}} = f^{-(n+b)|\underline{i}|+b} Q_{\underline{i}}.$$

Il suffit donc de montrer que $S = f^{-b}H$ est un élément de $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$.

Soient $n_{\underline{i}}$ la partie entière de $|\underline{i}|/2c$ et des éléments $b_{\underline{i}}$ de V tels que $a_{\underline{i}} = \pi^{n_{\underline{i}}}b_{\underline{i}}$. Il existe un entier m'' assez grand et des constantes $D > 0$ et $D' > 0$ pour que l'on ait les inégalités, pour tout $|\underline{i}|$,

$$\nu_{m''}((n+b)|\underline{i}|) \leq \frac{(n+b)|\underline{i}|}{p^{m''+1}} + 1 \leq \frac{|\underline{i}|}{2c} + D \leq v_{\pi}(b_{\underline{i}}) + D'.$$

On voit ainsi que

$$\pi^{D'}S = \sum_{\underline{i}} \frac{\pi^{D'+n_{\underline{i}}}b_{\underline{i}}}{f^{(n+b)|\underline{i}|}} Q_{\underline{i}},$$

est un élément de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m'',m)}(Z)$. Comme S est un élément de $j_*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}$, on conclut en appliquant le lemme précédent.

Terminons ce paragraphe par un lemme (très simple) concernant les algèbres faiblement complètes.

Lemme 2.2.1. *Soit A une V -algèbre faiblement complète. Alors, l'élément π est dans le radical de Jacobson de A , c'est-à-dire dans l'intersection des idéaux à gauche maximaux de A .*

Bien sûr, ce lemme est aussi vrai si on considère le radical de Jacobson à droite de A .

Démonstration. Soit \mathcal{M} un idéal maximal à gauche de A . Supposons qu'il ne contienne pas π . Alors il existe des éléments $x \in \mathcal{M}$ et $u \in A$ tels que $1 = x + \pi u$. L'élément $v = \sum \pi^i u^i$ converge dans A car A est une algèbre faiblement complète et est un inverse de x . La relation précédente s'écrit donc : $1 = vx \in \mathcal{M}$, ce qui contredit le fait que \mathcal{M} est un idéal maximal et montre le lemme.

2.3 Equivalence des définitions à droite et à gauche.

On peut procéder comme en 1.1.8 en considérant sur $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$ la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module à droite, et sur $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}$ la structure de \mathcal{O}_W -module à droite. Les deux faisceaux obtenus sont alors des sous-faisceaux respectivement de $j_*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}$ et de $j_*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U} \cap W}^{(m)}$. Le lemme 1.1.10 montre que les faisceaux obtenus sont isomorphes. Ce qui donne, dans les cas des algèbres $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$, l'isomorphisme de faisceaux d'anneaux suivant :

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z).$$

Nous obtenons comme corollaire à cet isomorphisme.

Corollaire 2.3.1. *Le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$) est plat à droite et à gauche sur le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z)$).*

Démonstration. Sur un ouvert affine V , sur lequel f relève une équation de Z , on a la description suivante de l'isomorphisme précédent

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f](W) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)(W) \simeq \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)(W) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f](W).$$

Or, l'algèbre à gauche de l'isomorphisme est plate à gauche sur $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)(W)$, par platitude de la localisation, et l'algèbre à droite de cet isomorphisme est plate à droite sur $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)(W)$ pour la même raison, d'où l'assertion.

Il sera clair dans la suite que les propriétés à droite de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ et de $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$ se démontreront comme les propriétés à gauche, via l'isomorphisme précédent. Nous nous contenterons d'exposer les propriétés à gauche.

2.4 Propriétés des algèbres d'opérateurs différentiels à coefficients sur-convergeants localisés.

On établit la cohérence des algèbres $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ et $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$. La cohérence des algèbres complétées $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$ et $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(Z)$ résulte de la proposition 3.3.4 de [3]. La démonstration est la même dans les deux cas et on traite seulement le cas de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$. On note $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$ pour la démonstration. La cohérence résulte très simplement de celle de \mathcal{E} . L'énoncé est le suivant.

Proposition 2.4.1. *Le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}_W^{(m',m)}(*Z)$) est un sous-faisceau d'anneaux cohérent à droite et à gauche de $j_*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}$ (resp. $j_*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)}$).*

Démonstration. On traite seulement le cas de $\mathcal{E}(*Z)$. Soit W un ouvert affine de \mathcal{X} sur lequel f relève une équation de Z . Nous reprenons l'écriture précédente de $\mathcal{E}(*Z)(W)$. Si I est un idéal à gauche de $\mathcal{E}(*Z)(W)$, il est facile de voir que I s'identifie à

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[1/f](W) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(W)} (I \cap \mathcal{E}(W)).$$

On conclut alors par noethérianité de $\mathcal{E}(W)$.

Pour achever la démonstration de la cohérence, il suffit, d'après 3.1.1 de [3], de montrer que si W' est un ouvert affine inclus dans W , alors $\mathcal{E}(*Z)(W')$ est plat sur $\mathcal{E}(*Z)(W)$. Le faisceau \mathcal{E} étant cohérent, le module $\mathcal{E}(W')$ est plat sur $\mathcal{E}(W)$. On observe alors, que si M est un faisceau de $\mathcal{E}(*Z)$ -modules à gauche, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}(W') \otimes_{\mathcal{E}(W)} M \simeq \mathcal{E}(*Z)(W') \otimes_{\mathcal{E}(*Z)(W)} M,$$

ce qui montre la platitude cherchée.

Nous avons en fait besoin de résultats un peu plus complets.

Soit \mathcal{E} un faisceau d'anneaux cohérent sur un espace topologique \mathcal{T} . On dit que \mathcal{T} est \mathcal{E} -affine si tout \mathcal{E} -module cohérent est engendré par ses sections globales et si le foncteur $\Gamma(\mathcal{T}, \cdot)$ est acyclique pour ces faisceaux. Ces propriétés seront appelées propriété A et B respectivement.

Nous rappelons tout ouvert affine de \mathcal{X} est $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m',m)}(Z)$ -affine (3.3 de [3]) (resp. l'espace projectif est $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m',m)}$ -affine ([7])). Par passage à la limite inductive sur le schéma formel \mathcal{X} qui est noethérien, on en déduit que tout ouvert affine de \mathcal{X} est $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}$ -affine (resp. l'espace projectif est $\mathcal{A}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}$ -affine). Nous avons alors la proposition

Proposition 2.4.2. (i) L'espace projectif est $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ -affine (resp. $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$ -affine).

(ii) Tout ouvert affine de \mathcal{X} est $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(*Z)$ -affine (resp. $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(*Z)$ -affine).

Pour la démonstration, nous noterons \mathcal{E} l'un des faisceaux ci-dessus.

La démonstration de la proposition repose sur le fait qu'elle est vraie pour les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{E}^{(m)}/\pi\mathcal{E}^{(m)}$. En effet, dans les deux cas, le faisceau $\mathcal{E}^{(m)}/\pi\mathcal{E}^{(m)}$ est isomorphe au faisceau $j_*\mathcal{D}_{U_0}^{(m)}$ où j est l'inclusion du complémentaire du diviseur \mathcal{U} dans \mathcal{X} .

On a en fait la proposition suivante.

Proposition 2.4.2.1. Soient W un ouvert de \mathcal{X} , \mathcal{D} un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres cohérent, localement noethérien, tel que W soit $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}$ -affine et $\mathcal{D}/\pi\mathcal{D}$ -affine, alors W est \mathcal{D} -affine.

D'après les théorèmes généraux (cf 3.1 de [3]), le faisceau $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}$ est cohérent et localement noethérien.

On commence par montrer le fait que W est $\mathcal{D}/\pi^a\mathcal{D}$ -affine pour tout entier $a > 0$. On procède pour cela par récurrence sur a . Supposons que ce soit vrai jusque $a - 1$. Soit M un $\mathcal{D}/\pi^a\mathcal{D}$ -module cohérent, on considère $N = \text{Im}(M \xrightarrow{\pi} M)$, qui est un $\mathcal{D}/\pi^{a-1}\mathcal{D}$ -module cohérent, acyclique pour le foncteur Γ par hypothèse de récurrence et engendré par ses sections globales. On a de plus une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où C est un $\mathcal{D}/\pi\mathcal{D}$ -module cohérent. En appliquant la suite exacte longue de cohomologie, on voit que M est acyclique pour Γ . D'autre part, on a une famille finie de sections globales engendrant M comme \mathcal{D} -modules en relevant des sections globales de C engendrant C et en complétant avec une famille finie de sections globales de N engendrant N .

Commençons par montrer l'acyclicité des \mathcal{D} -modules cohérents. Soit M un \mathcal{D} -module cohérent et M^t le sous-module de torsion de M . Le module M^t est un sous-module cohérent de M , de torsion. Par noethérianité de W , il existe un entier a tel que $\pi^a M^t = 0$. D'après la suite exacte

$$0 \rightarrow M^t \rightarrow M \rightarrow M/M^t \rightarrow 0,$$

l'acyclicité de M pour $\Gamma(W, \cdot)$ résultera de celle de M/M^t . Cela nous ramène au cas où le module cohérent M est sans V -torsion. On dispose ainsi de deux suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\pi} M \rightarrow M/\pi M \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow M \rightarrow K \otimes_V M \rightarrow K/V \otimes_V M \rightarrow 0.$$

Le module $M_{\mathbf{Q}} = K \otimes_V M$ est un $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}$ -module cohérent, et est donc acyclique pour $\Gamma(W, \cdot)$ par hypothèse. Des suites exactes longues de cohomologie appliquées à ces deux suites exactes on tire :

(i) une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \Gamma(W, M)/\pi\Gamma(W, M) \rightarrow \Gamma(W, M/\pi M) \rightarrow H^1(W, M) \xrightarrow{\pi} H^1(W, M) \rightarrow 0,$$

(ii) pour tout $n \geq 2$, un isomorphisme $H^n(W, M) \xrightarrow{\pi} H^n(W, M)$,

(iii) une surjection $\Gamma(W, K/V \otimes_V M) \rightarrow H^1(W, M) \rightarrow 0$,

(iv) des isomorphismes, pour tout $n \geq 0$, $H^n(W, K/V \otimes M) \simeq H^{n+1}(W, M)$.

D'après (iii) et (iv), on voit que les groupes $H^n(W, M)$ sont annulés par π pour tout $n \geq 1$. On déduit de (i) et (ii), qu'ils sont en fait nuls pour tout $n \geq 1$. Ceci achève la démonstration de l'acyclicité.

Revenons maintenant au cas où M est quelconque. Montrons que M est engendré par ses sections globales sur W . Le faisceau $M_{\mathbf{Q}}$ est engendré par ses sections globales. Comme le faisceau \mathcal{D} est localement noethérien et que W est un espace topologique noethérien, on a une suite exacte courte

$$\mathcal{D}^a \xrightarrow{\mu} M \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

où \mathcal{C} est un \mathcal{D} -module de type fini de torsion. Il existe donc un entier $a > 0$ tel que \mathcal{C} soit un $\mathcal{D}/\pi^a\mathcal{D}$ -module cohérent, engendré comme \mathcal{D} -module par des sections globales c_1, \dots, c_N . D'après la propriété d'acyclicité on a une surjection $\Gamma(W, M) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{C})$. On peut relever les sections c_1, \dots, c_N en des sections globales de M . On obtient des sections globales engendrant M en complétant avec la famille des sections globales $\mu(e_i)$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D}^a$ (où le 1 est en i ème position).

3 Dimension homologique.

Si M est un module sur un anneau A , nous noterons $pd_A(M)$ la dimension projective de M , en omettant le A en indice si cette donnée est claire. Nous introduirons aussi la dimension plate de M (i.e. la borne inférieure des longueurs des résolutions plates de M) et la dimension plate de l'anneau A . La dimension plate est évidemment inférieure à la dimension projective.

Nous commencerons par des énoncés concernant les sections globales des algèbres d'opérateurs différentiels, puis nous donnerons les énoncés pour les faisceaux eux-mêmes.

3.1 Énoncés de finitude pour les algèbres de sections globales sur un ouvert

Dans toute la suite, on considère des couples $(G^{(m)}, W)$ dans deux cas. Dans le premier cas, \mathcal{X} et Z sont comme dans l'introduction, W un ouvert affine de \mathcal{X} et $G^{(m)}$ est le faisceau $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}$. Dans le deuxième cas, \mathcal{X} est l'espace projectif, $W = \mathcal{X}$, Z est le diviseur à l'infini, et $G^{(m)}$ est le faisceau $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{\dagger(m)}(\infty)$.

On notera $\widehat{G}^{(m',m)}$ l'un des faisceaux complets $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(Z)$ ou $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}(\infty)$, et $G_{\pi}^{(m',m)}(*Z)$ la réduction modulo π de $\widehat{G}^{(m',m)}(*Z)$. On notera enfin $\widehat{F}^{(m',m)} =$

$\Gamma(W, \widehat{G}^{(m',m)})$, $F^{(m)} = \Gamma(W, G^{(m)})$, $\widehat{F}^{(m)}(*Z) = \Gamma(W, \widehat{G}^{(m)}(*Z))$ et $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z) = \Gamma(W, \widehat{G}^{(m',m)}(*Z))$.

On a déjà rappelé que W est $\widehat{G}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ -affine. Pour le cas de l'espace projectif, et pour le diviseur à l'infini, ce résultat est montré dans [7]. On déduit alors de 2.4.2, que W est $\widehat{G}^{(m',m)}(*Z)$ -affine. On voit de plus que

$$\begin{aligned} F^{(m)}(*Z)/\pi F^{(m)}(*Z) &= \Gamma(W \cap \mathcal{U}, \mathcal{D}_{X_0}^{(m)}), \\ F^{(m',m)}(*Z)/\pi F^{(m',m)}(*Z) &= \Gamma(W \cap \mathcal{U}, \mathcal{D}_{X_0}^{(m)}). \end{aligned}$$

En particulier, ces algèbres sont noethériennes et de dimension homologique finie inférieure à $2N + 1$ d'après 4.4.3 de [4].

Nous aurons besoin d'utiliser ici des énoncés de platitude de $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)}$ sur $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ pour $m'' \geq m'$. Ces énoncés résultent de l'énoncé 4.3.2 de [3] et ensuite de 4.3.8 du présent article, dans le cas des faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ et des faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$. De ces propriétés de platitude et de la noethérianité des algèbres $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$, on déduit que les algèbres $F_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ sont cohérentes. On va montrer qu'elles sont de dimension homologique finie, en s'inspirant de la démonstration de 7.3.7 de [12] (qui se base sur le fait que algèbres $F^{(m)}(*Z)/\pi F^{(m)}(*Z)$, qu'on notera aussi $F_{\pi}^{(m)}(*Z)$, sont de dimension homologique finie). On ne peut pas appliquer directement cette proposition ici car on ne sait pas si les algèbres $F^{(m)}(*Z)$ sont noethériennes. Le premier lemme est le suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit M un $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)$ -module de type fini sans π -torsion, alors*

(i)

$$pd_{F_{\pi}^{(m',m)}(*Z)}(M/\pi M) \leq pd_{\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)}(M),$$

(ii) *il existe $m'' \geq m'$ tel que*

$$pd_{\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)}}(M_{\mathbf{Q}}) = pd_{F_{\pi}^{(m',m)}(*Z)}(M/\pi M) \leq 2N + 1.$$

Démonstration. La démonstration du (i) est identique à celle de la première assertion de 7.3.6 de [12]. Il reste à montrer le (ii). La borne $2N + 1$ provient du fait que les algèbres $F_{\pi}^{(m',m)}(*Z)$ sont de dimension homologique inférieure à $2N + 1$ d'après 4.4.3 de [4]. Il suffit donc de montrer l'égalité. Nous commençons pour cela par le lemme suivant.

Lemme 3.1.1.1. *Soit N un $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)$ -module de type fini, tel que $N/\pi N = 0$, alors il existe un entier $m'' \geq m'$ tel que*

$$\widehat{F}^{(m'',m)}(*Z) \otimes_{\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)} N = 0.$$

Démonstration. Supposons que le module N soit engendré par des éléments n_1, \dots, n_k et notons \underline{n} la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ n_k \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse que $N = \pi N$, entraîne qu'il existe une matrice $T \in M_k(\widehat{F}^{(m',m)})$ et un entier A tels que $\underline{n} = \pi f^{-A} T \underline{n}$. Cette égalité s'écrit encore $\underline{n} = \pi(\pi f^{-B}) R \underline{n}$, avec R une matrice à coefficients dans $\widehat{F}^{(m',m)}$. Il existe un entier $m'' \geq m$, tel que l'élément πf^{-B} soit dans $\widehat{F}^{(m'',m)}$, et donc que la matrice $S = \pi f^{-B} R$ soit en fait à coefficients dans $\widehat{F}^{(m'',m)}$. La matrice $Id - \pi S$ est alors inversible dans $M_k(\widehat{F}^{(m'',m)})$, d'inverse $\sum_i \pi^i S^i$. On en déduit le lemme avec cet m'' .

Revenons à la démonstration du lemme 3.1.1. Supposons d'abord que le module $M/\pi M$ est libre engendré par les classes $\text{mod } \pi$ des éléments m_1, \dots, m_k de M . On dispose alors d'une flèche

$$\bigoplus_{i=1}^k \widehat{F}^{(m',m)}(*Z) \rightarrow M,$$

dont le noyau K et le conoyau S sont des $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)$ -modules de type fini tels que $K/\pi K$ et $S/\pi S$ sont nuls. D'après le lemme précédent, il existe un m'' tel que les modules $\widehat{F}^{(m'',m)} \otimes K$ et $\widehat{F}^{(m'',m)} \otimes S$ soient nuls. Par platitude de $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)}$ sur $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$, cela entraîne que

$$\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes_{\widehat{F}^{(m',m)}} M$$

est un module libre. Si maintenant le module $M/\pi M$ est un module projectif, il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où F est un $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)$ -module libre de type fini. Comme M est sans π -torsion, on a une suite exacte $\text{mod } \pi$,

$$0 \rightarrow K/\pi K \rightarrow F/\pi F \rightarrow M/\pi M \rightarrow 0,$$

qui est scindée, si bien que l'on a un isomorphisme $F/\pi F \simeq K/\pi K \oplus M/\pi M$. Si on applique le lemme précédent à $K \oplus M$, on voit qu'il existe un $m'' \geq m'$ tel que le module $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes (K \oplus L)$ soit libre, et donc tel que $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes M$ soit projectif. Cela permet de procéder par récurrence sur la dimension projective de $M/\pi M$.

Supposons que le lemme soit vrai pour tout module M tel que $dp(M/\pi M) \leq n - 1$, pour un certain entier n supérieur à 1. Partons d'une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0,$$

qui donne une suite exacte $\text{mod } \pi$,

$$0 \rightarrow K/\pi K \rightarrow F/\pi F \rightarrow M/\pi M \rightarrow 0.$$

On a : $dp(K/\pi K) = dp(M/\pi M) - 1$ et par récurrence, il existe un entier m'' tel que $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes K$ soit de dimension projective $dp(M/\pi M) - 1$, ce qui entraîne que $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes M$ est de dimension projective $dp(M/\pi M)$ et le lemme. Le premier corollaire est le suivant.

Corollaire 3.1.2. (i) Soit M un $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ -module de type fini, alors il existe $m'' \geq m'$, tel que le module $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)} \otimes_{\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}} M$ admet une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$.

(ii) Soit M un $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m,m)}$ -module de type fini, alors il existe $m'' \geq m$, tel que le module $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m'')} \otimes_{\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m,m)}} M$ admet une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$.

Démonstration. Il existe un $\widehat{F}^{(m',m)}(*Z)$ -module de type fini N tel que $M \simeq N_{\mathbf{Q}}$. D'après le lemme précédent, il existe m'' tel que $\widehat{F}^{(m'',m)} \otimes N$ admette une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$, qui donne une résolution projective de M sur $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)}$ après tensorisation par \mathbf{Q} . Le (ii) résulte du (i) par platitude de $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m'',m)}$ sur $\widehat{F}_{\mathbf{Q}}^{(m,m)}$, ce qui suit de 3.5.3 de [3] et de 4.3.10 dans le cas de l'espace projectif.

Ceci nous permet de montrer le théorème suivant. On considère \mathcal{X} et Z comme dans l'introduction, et W un ouvert affine de \mathcal{X} . Dans la deuxième partie des énoncés, Z est le diviseur à l'infini.

Théorème 3.1.3. *i Les algèbres $\Gamma(W, \mathcal{E}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}(Z))$ et $\Gamma(\widehat{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}}^N, \mathcal{A}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}(\infty))$ sont de dimension homologique finie inférieure à $2N + 2$.*

ii Les algèbres $\Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\dagger Z))$ et $A_N(K)^{\dagger}$ sont de dimension homologique finie inférieure à $2N + 2$.

Démonstration. La démonstration des deux énoncés est la même et on montre le 2e énoncé dans le premier cas. On note A l'algèbre $\Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\dagger Z))$ et $A^{(m)} = \Gamma(W, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(Z))$, qui est une algèbre noethérienne. Comme nous l'avons déjà signalé, les algèbres $A^{(m')}$ sont plates sur les algèbres $A^{(m)}$ pour $m' \geq m$.

Il faut montrer que les groupes $Ext_A^i(E, M)$ sont nuls pour tout A -module monogène E , tout module M et tout $i > 2N + 2$. Soit $E = A/I$ une présentation de E . Le module E n'est pas nécessairement cohérent et il faut procéder comme en 4.4.7 de [4]. Posons $I_m = I \cap A^{(m)}$, qui est un idéal de type fini, $J_m = A^{(m)}/I_m$, $E_m = A/I_m$, de sorte que E s'identifie canoniquement à $\lim_{\rightarrow m} E_m$. De l'isomorphisme canonique

$$Hom_A(E, M) = \lim_{\leftarrow m} Hom_A(E_m, M),$$

on déduit la suite spectrale des foncteurs dérivés :

$$E_2^{i,j} = R^i \lim_{\leftarrow m} Ext_A^j(E_m, M) \implies Ext_A^n(E, M).$$

D'après le corollaire précédent, il existe une suite croissante d'entiers (u_m) telle que les modules

$$A^{(u_m)} \otimes_{A^{(m)}} J_m$$

soient de dimension projective inférieure à $2N + 1$. Comme A est plat sur $A^{(u_m)}$, on voit que E_m admet une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$. Les termes $Ext_A^j(E_m, M)$ sont donc nuls pour $j > 2N + 1$. Comme les $R^i \lim_{\leftarrow m}$ sont toujours nuls pour $i > 1$, (car tout système projectif admet une résolution flasque à deux termes), on voit que l'on a bien la propriété demandée.

Remarques.

i On pourrait aussi donner des énoncés pour les algèbres $\Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger\infty))$ dans le cas de l'espace projectif et avec un ouvert W -affine. N'ayant pas formulé les énoncés de platitude 4.3.8 dans ce cas, nous ne l'avons pas fait.

ii On peut conjecturer l'assertion suivante :

Les algèbres $F^{(m)}$ sont noethériennes.

3.2 Énoncés de finitude pour les faisceaux d'algèbres d'opérateurs différentiels à coefficients surconvergents.

Soit E un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -algèbres. Soit $|\mathcal{X}|$, l'ensemble des points fermés de \mathcal{X} . On rappelle que la dimension homologique $dh(E)$ d'un faisceau d'anneaux \mathcal{E} est donnée par

$$dh(E) = \sup_{x \in |\mathcal{X}|} dh(\mathcal{E}_x).$$

Dans l'énoncé qui suit, on introduit la dimension plate de ces faisceaux, qui est définie de façon analogue à la dimension projective. On déduit formellement des énoncés précédents le résultat sur les faisceaux d'opérateurs différentiels.

Théorème 3.2.1. (i) *Les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}(Z)$, sont de dimension homologique finie inférieure à $2N + 2$.*

(ii) *Les faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ sont de dimension homologique finie d vérifiant $N \leq d \leq 2N + 2$ et de dimension plate w vérifiant $N \leq w \leq 2N + 1$.*

(iii) *Tout $\mathcal{E}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}(Z)$ -module cohérent admet une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$.*

(iv) *Tout $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ -module cohérent admet une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$.*

Démonstration. Les démonstrations de (iii) et de (iv) sont identiques. Notons $\mathcal{D}^{(m)}$ le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(Z)$ et \mathcal{D}^\dagger l'un des deux faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ ou $\mathcal{E}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger(m)}(Z)$. Soient \mathcal{M} un \mathcal{D}^\dagger -module à gauche cohérent, x un point fermé de \mathcal{X} , W un ouvert affine contenant x , $M = \Gamma(W, \mathcal{M})$. Alors, il existe un entier naturel m et un $\mathcal{D}^{(m)}(W)$ -module cohérent $M^{(m)}$ tels que

$$M \simeq \mathcal{D}^\dagger(W) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}(W)} M^{(m)}.$$

D'après le corollaire 3.1.2, il existe un entier naturel $m' \geq m$ tel que le module

$$\mathcal{D}^{(m')}(W) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}(W)} M^{(m)}$$

a une résolution projective de longueur inférieure à $2N + 1$. Par platitude de $\mathcal{D}^\dagger(W)$ sur $\mathcal{D}^{(m')}(W)$, cela donne une résolution projective de M de longueur inférieure à $2N + 1$.

Les démonstrations de (i) et de la première partie de (ii) découlent de cette assertion, en procédant comme pour la démonstration du théorème 3.1.3.

Montrons la deuxième partie de (ii). Soient x un point fermé de \mathcal{X} , W un ouvert affine contenant x tel que $Z \cap W$ soit donné par l'équation $f = 0$. D'après le théorème

4.3.10 de [3], l'algèbre $\Gamma(W, j_*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger)$ est fidèlement plate à droite et à gauche sur l'algèbre $\Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z))$. Il découle alors de l'énoncé 7.2.6 (ii) de [12], que la dimension plate de $\Gamma(W, \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z))$ est inférieure à celle de $\Gamma(W, j_*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger)$ et donc à $2N + 1$, d'après 4.4.7 de [4]. D'autre part, la minoration est obtenue comme suit. Le complexe de Spencer introduit en 3.2.2 de [2] est une résolution de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ -module à gauche. Dans [8], nous vérifions que, localement, le complexe de Spencer suivant est une résolution du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\dagger Z)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Lambda^d \mathcal{T}_{\mathcal{X}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{T}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z) \rightarrow 0.$$

Les flèches de ce complexe sont les mêmes que celles décrites dans [2], une fois que l'on a des coordonnées locales sur un ouvert de \mathcal{X} . Nous en déduisons que

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)}^N(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\dagger Z), \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}},$$

et la minoration cherchée.

Remarques.

- i Conjecturalement, le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ est de dimension homologique globale inférieure à N . Cela impliquerait que les faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ et que l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ sont de dimension plate inférieure à N .
- ii La démonstration ne donne la finitude de la dimension homologique pour les faisceaux non tensorisés par \mathbf{Q} , ni pour l'algèbre $A_N(V)^\dagger$. La raison est que l'on n'a pas de théorèmes de platitude de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}(Z)$ sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ (resp. de $\widehat{C}^{(m+1)}$ sur $\widehat{C}^{(m)}$ avec les notations du chapitre suivant).
- iii On pourrait appliquer cette méthode aux faisceaux introduits par Mebkhout et Narvaez-Macarro. Dans ce cas, il est nécessaire de disposer d'énoncés de platitude analogues, comme dans le cas de $A_N(K)^\dagger$, à l'énoncé 4.3.8.

Nous examinons maintenant le cas particulier des modules holonomes. Dans l'énoncé qui suit, M est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ -module holonome sur l'ouvert \mathcal{U} , complémentaire du diviseur. Cela signifie que les modules $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}^\dagger}^i(M|_{\mathcal{U}}, \mathcal{D}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}^\dagger)$ sont nuls pour tout $i \neq N$ (cf [14] pour une caractérisation géométrique de l'holonomie). Il en est de même pour les modules à droite $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)}^i(M, \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z))$, en vertu de la pleine fidélité de la tensorisation par $\mathcal{D}_{\mathcal{U},\mathbf{Q}}^\dagger$ sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$. Nous avons l'énoncé suivant.

Corollaire 3.2.2. *Soit M un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ -module holonome sur l'ouvert complémentaire du diviseur, alors, comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ -module, M est de dimension projective inférieure à N .*

Démonstration. Soit T un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ -module à gauche cohérent. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ pour la démonstration. On montre par récurrence sur la dimension projective de T , que les groupes $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(M, T)$ sont nuls pour $i \geq N + 1$. L'assertion est locale. Si T est projectif, il est localement facteur direct d'un module libre $A \simeq \mathcal{D}^r$. Le \mathbf{Z} -module $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(M, T)$ est aussi facteur direct du module $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(M, A) \simeq \bigoplus \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$,

qui est nul pour $i \geq N + 1$, d'où l'assertion si T est projectif. En général, si T a une dimension projective égale à d , T admet une résolution $0 \rightarrow T' \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow 0$, où P est un \mathcal{D} -module à gauche cohérent projectif, et T' est de dimension projective $d - 1$. On déduit de la suite exacte longue de cohomologie pour le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, \cdot)$: pour tout $i \geq N + 1$, on a l'isomorphisme $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^i(M, T) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}}^{i+1}(M, T')$, d'où le corollaire.

Le corollaire suivant est formel. Soient \mathcal{D} l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ ou le faisceau d'algèbres $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$, et $D_{parf}^b(\mathcal{D})$ la catégorie dérivée des complexes bornés à cohomologie localement libre de type finie, resp. $D_{coh}^b(\mathcal{D})$ la catégorie dérivées des complexes bornés à cohomologie cohérente. On a alors l'énoncé suivant

Corollaire 3.2.3. *Les catégories $D_{coh}^b(\mathcal{D})$ et $D_{parf}^b(\mathcal{D})$ coïncident.*

3.3 Énoncés de finitude pour les algèbres de fonctions à coefficients surconvergents.

La démonstration de la finitude de la dimension homologique repose sur la même idée que précédemment. En particulier, nous n'avons pas d'énoncé pour les algèbres $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. L'énoncé est le suivant.

Proposition 3.3.1. *(i) Pour tout ouvert affine W , l'algèbre de sections globales $\Gamma(W, \mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}(\dagger Z))$ est de dimension homologique finie égale à $N + 1$.*

(ii) Les faisceaux d'algèbres $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}(\dagger Z)$ sont de dimension homologique finie égale à N .

(iii) Les faisceaux d'algèbres $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}(\dagger Z)$ sont de dimension homologique égale à $N + 1$.

Démonstration. La démonstration est la même dans le cas de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et dans le cas de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z)$. Un point important par rapport à ce qui précède est que l'algèbre faiblement complète $\Gamma(W, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger Z))$ est noethérienne, d'après le résultat de Fulton ([6]). C'est donc aussi le cas de l'algèbre localisée $A = \Gamma(W, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\dagger *Z))$. D'autre part, la réduction modulo π de cette algèbre est l'algèbre $\Gamma(W \cap \mathcal{U}, \mathcal{O}_{X_0})$ qui est de dimension homologique finie inférieure à N et π est dans le radical de Jacobson de A car cette algèbre est faiblement complète. On peut donc directement appliquer et on voit que l'algèbre A est de dimension homologique égale à $N + 1$. Pour montrer le (ii), il faut procéder comme dans 4.4.5 de [4], ce qui revient à montrer que si M est un A module sans π -torsion tel que $M/\pi M$ soit projectif, alors M est projectif. Nous montrons ceci dans 3.1.1 pour des algèbres faiblement complètes, ce qui est le cas de A .

4 Structure de l'algèbre $A_N(K)^\dagger$.

Nous étudions ici la filtration de l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ par des sous-algèbres complètes notées $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$, décrites en 4.3, et qui coïncident avec les algèbres $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ définies en 4.1.

Il résulte de la descente de Frobenius explicitée dans [4], que le Frobenius définit une équivalence de catégories entre les $A_N(K)^\dagger$ -modules à gauche cohérents. Dans la première partie, nous montrons que le Frobenius, comme dans le cas des opérateurs différentiels de Berthelot, élève le niveau et transforme un $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module en un $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -module. Enfin, nous montrons que l'algèbre $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est plate à droite et à gauche sur $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$.

Le fait que $A_N(K)^\dagger$ soit limite inductive d'algèbres complètes est établi plus généralement en [11], pour des algèbres de sections globales de faisceaux d'opérateurs différentiels sur des espaces faiblement complets. Mais cela ne permet pas de montrer de résultat de platitude.

4.1 Contexte.

Les résultats présentés ici sont énoncés dans [7]. Soient \mathcal{X} l'espace projectif formel de dimension N sur \mathcal{S} et $[u_0, \dots, u_N]$ des coordonnées homogènes sur \mathcal{X} . Notons Z le diviseur défini par $u_0 = 0$, \mathcal{U} , l'ouvert affine complémentaire, x_1, \dots, x_N les coordonnées sur \mathcal{U} définies par $x_i = u_i/u_0$. L'ouvert $D_+(u_i)$ sera noté U_i . Les opérateurs $\underline{\partial}^{(k)}(m)$ sont des sections globales sur \mathcal{X} du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$. On introduit donc sur \mathcal{X} les faisceaux $\mathcal{A}^{(m)}(\infty)$ et $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}(\infty)$ comme en 1.1.7 (en oubliant \mathcal{X} dans la notation),

$$\mathcal{A}^{(m',m)}(\infty) = \bigoplus_{\underline{k}} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underline{\partial}^{(k)}(m),$$

et $\widehat{\mathcal{A}}^{(m',m)}(\infty)$ son complété p -adique. Les sections globales sur \mathcal{X} de ces faisceaux seront notées respectivement $C'^{(m',m)}$ et $\widehat{C}'^{(m',m)}$. Le faisceau d'anneaux

$$\lim_{\rightarrow (m',m)} \widehat{\mathcal{A}}^{(m',m)}(\infty) \otimes_V K$$

s'identifie alors au faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\dagger Z)$ et l'algèbre $A_N(K)^\dagger$ s'obtient comme limite inductive des algèbres $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}'^{(m',m)}$. On introduit aussi

$$C'^{\dagger(m)} = \lim_{\rightarrow m'} \widehat{C}'^{(m',m)}.$$

Il résulte facilement des calculs effectués en 3.4 et 3.5 de [11], que l'on a la description suivante de $\widehat{C}'^{(m',m)}$

$$\widehat{C}'^{(m',m)} = \left\{ \sum_{\underline{l}, \underline{k}} a_{\underline{l}, \underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{(k)}(m) : a_{\underline{l}, \underline{k}} \in V, v_p(a_{\underline{l}, \underline{k}}) \geq \nu_{m'}(|\underline{l}|) \text{ et } v_p(a_{\underline{l}, \underline{k}}) - \nu_{m'}(|\underline{l}|) \rightarrow \infty \text{ si } |\underline{k}| + |\underline{l}| \rightarrow \infty \right\}.$$

Pour tout ce qui concerne l'action du Frobenius, on suppose que k est un corps parfait et que $V = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k . Sur \mathcal{X} , on considère le

relèvement du Frobenius défini par $F^{-1}(u_i) = u_i^p$. On note $\bar{\sigma}$ l'élévation à la puissance p sur k et σ le relèvement de cet isomorphisme sur $W(k)$. On note \mathcal{X}' le schéma obtenu par changement de base $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ où l'homomorphisme de $W(k)$ dans $W(k)$ est σ . Les notations sur \mathcal{X}' sont les mêmes que sur \mathcal{X} , avec un $'$. Suivant Berthelot, on définit, pour \mathcal{E}' un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -modules

$$F^*(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E},$$

$$F^b(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \mathcal{E}).$$

Comme F est fini et plat, F^* induit une équivalence de catégories.

La même démonstration que 3.1.3 donne le résultat suivant.

Proposition 4.1.1. *Les algèbres $C_{\mathbf{Q}}^{\dagger(m)}$ sont de dimension homologique finie inférieure à $2N + 2$.*

Dans toute la suite, on note $\widehat{C}'^{(m)} = \widehat{C}'^{(m,m)}$.

4.2 Décomposition de l'action du Frobenius sur l'algèbre $A_N(K)^{\dagger}$.

Nous commençons par remarquer que les foncteurs F^* (resp. F^b) induisent des auto-équivalences de catégories entre la catégorie des $A_N(K)^{\dagger}$ -modules à gauche cohérents (resp. $A_N(K)^{\dagger}$ -modules à droite cohérents). Cette remarque est formelle à partir du travail de Berthelot. Dans la suite nous précisons cette action de Frobenius en montrant que les applications F^* et F^b induisent des foncteurs entre la catégorie des $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{\prime(m)}$ -modules et celle des $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{\prime(m+1)}$ -modules. Pour ce faire, nous nous inspirons de la démonstration du fait analogue par Berthelot (2.2.3 de [4]). L'argument-clé est le lemme 4.2.5.1. En effet, Berthelot montre l'élévation du niveau par Frobenius, en montrant que la Frobenius induit un unique PD-morphisme Φ^* entre les voisinages à puissances divisées de niveau m de \mathcal{X}' et de niveau $m + 1$ de \mathcal{X} . Nous remarquons que ce PD-morphisme, dans le cas de l'espace affine, est à coefficients surconvergens (le long du diviseur à l'infini), ce qui permet d'étendre l'élévation du niveau par Frobenius, au cas des algèbres $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{\prime(m)}$. Cela passe par une description technique des structures de \mathcal{D} -modules obtenues en fonction des coefficients de Φ^* .

4.2.1 Action du Frobenius sur les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}$.

Sur \mathcal{X}' on introduit les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ relatifs au diviseur $u'_0 = 0$. On voit alors facilement que le Frobenius F induit un isomorphisme

$$F^* \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)} \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}.$$

En particulier, le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ est un $F^{-1}\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -module localement libre de rang Np . Le morphisme F^* induit une équivalence de catégories entre les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -modules et les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -modules. Si \mathcal{E} est un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -module, $F^b\mathcal{E}$ s'identifie en fait à

$$F^b(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}}(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}, \mathcal{E}),$$

de sorte que le morphisme F^b induit aussi un foncteur entre les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -modules et les $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -modules.

D'autre part, les sections globales de ces deux faisceaux se décrivent comme suit :

$$\widehat{B}'^{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}', \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}) = \left\{ \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}'^{\underline{l}} \mid v_{\pi}(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|) \text{ et } v_{\pi}(a_{\underline{l}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \rightarrow \infty \text{ si } |\underline{l}| \rightarrow \infty \right\},$$

$$\widehat{B}^{(m+1)} = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}) = \left\{ \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \mid v_{\pi}(a_{\underline{l}}) \geq \nu_{m+1}(|\underline{l}|) \text{ et } v_{\pi}(a_{\underline{l}}) - \nu_{m+1}(|\underline{l}|) \rightarrow \infty \text{ si } |\underline{l}| \rightarrow \infty \right\}.$$

L'application F^* est induite par le morphisme continu de V -algèbres qui envoie x'_i vers x_i^p pour tout i . Soit N un module cohérent sur $\Gamma(\mathcal{X}', \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)})$, on peut considérer le module obtenu par extension des scalaires :

$$F^*(N) = \widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)} \otimes_{\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m)}} N.$$

D'après les résultats de Berthelot exposés dans [9], \mathcal{X}' et \mathcal{X} sont respectivement $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -affines. Par définition on a : $F^* \widehat{B}'_{\mathbf{Q}}^{(m)} \simeq \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)})$.

Par exactitude à droite du produit tensoriel, on voit que, pour tout faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ -modules cohérents, on a la relation de commutation : $F^*(\mathcal{N}) \simeq F^*(\Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{N}))$, (pour voir cela il suffit de partir d'une résolution globale et libre de \mathcal{N} par des sommes directes de copies de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$). En particulier, F^* induit une équivalence de catégories entre les $\widehat{B}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents et les $\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -modules cohérents. On peut de même définir $F^b N$ en posant

$$F^b N = \text{Hom}_{\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m)}}(\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}, N).$$

Action du Frobenius sur les sections globales des $\widehat{\mathcal{B}}$ -modules. Supposons ici que le Frobenius sur l'espace projectif est défini par l'élévation à la puissance p des coordonnées. Nous remarquons brièvement que le faisceau $\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est libre comme $\widehat{B}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module, de base les $\underline{x}^{\lambda} = \prod_{(i_1, \dots, i_N)} x_i^{\lambda_i}$ avec, pour tout i , $0 \leq \lambda_i \leq p-1$.

En effet, ces éléments sont des sections globales de $\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ sur \mathcal{X} . On a donc un homomorphisme s de $\widehat{B}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents

$$\bigoplus_{\underline{\lambda}} \widehat{B}'_{\mathbf{Q}}^{(m)} \underline{x}^{\underline{\lambda}} \rightarrow \widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)},$$

qui est un isomorphisme sur \mathcal{U} . En particulier, la flèche s est injective. Comme le foncteur Γ induit une équivalence de catégories, il suffit de vérifier la surjectivité au niveau des sections globales. Soit f un élément de $B^{(m+1)}$, qui s'écrit

$$f = \sum_{\underline{k}} p^{\nu_{m+1}(|\underline{k}|)} a_{\underline{k}} \underline{x}^{\underline{k}},$$

tel que $a_{\underline{k}} \in V$. Tout multi-indice \underline{k} se décompose d'une unique façon $\underline{k} = p.\underline{t} + \underline{r}$, où $0 \leq r_i \leq p-1$ pour tout entier i . Nous observons alors que $f = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} F^{-1}(p^{\nu_{m+1}(|\underline{k}|)} \underline{x}'^{\underline{k}}) \underline{x}^{\underline{r}}$.

Nous avons en outre la majoration $|\nu_{m+1}(|\underline{k}|) - \nu_m(|\underline{l}|)| \leq 4N$, si bien que l'élément $\pi^{4N} p^{\nu_{m+1}(|\underline{k}|)} \underline{x}^{\underline{l}}$ est dans $\widehat{B}^{(m)}$. Cela montre que f est bien dans l'image de l'application s , qui est un isomorphisme.

Pour montrer que ces foncteurs F^* et F^\flat s'étendent aux $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}'^{(m)}$ -modules, nous avons besoin du formulaire 4.2.3.

4.2.2 Le cas de $A_N(K)^\dagger$.

On définit F^* comme en 4.2.1.

Proposition 4.2.2.1. - *Le foncteur F^* (resp. F^\flat) induit une auto-équivalence de catégories de la catégorie des $A_N(K)^\dagger$ -modules à gauche cohérents (resp. à droite)*

- *Le foncteur F^* (resp. F^\flat) induit une équivalence de catégories de la catégorie des $\Gamma(\mathcal{X}', \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}(\infty))$ -modules à gauche cohérents (resp. à droite) et la catégorie des $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}(\infty))$ -modules à gauche cohérents (resp. à droite).*

Notons que dans l'énoncé de Berthelot, la condition de cohérence n'est pas nécessaire, alors qu'elle l'est ici.

Démonstration. Les démonstrations pour F^* et F^\flat sont les mêmes, et la démonstration des deux points est aussi la même. Nous montrons donc la deuxième assertion pour F^* . Cela est formel à partir du fait que l'assertion est vraie pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ -modules cohérents (4.1.3 de [4]) et que le foncteur Γ induit une équivalence de catégories entre ces modules cohérents et leurs sections globales.

Il suffit maintenant de vérifier que le foncteur F^* commute aux sections globales. Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ -module de type fini. Il existe un morphisme canonique $F^*(M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}(\infty) \otimes M)$. Or, l'algèbre $\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est libre sur $\widehat{B}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$, de base les \underline{x}^λ (cf 4.2.1). Le module $F^*(M)$ s'identifie donc à $\bigoplus_{\underline{\lambda}} \underline{x}^\lambda M$, de même que $\Gamma(\mathcal{X}, F^*(M))$ (grâce à l'équivalence de catégories). Ceci montre que F^* commute avec le foncteur Γ . On en déduit formellement que F^* induit une équivalence de catégories entre les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ -modules cohérents et les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}(\infty)$ -modules cohérents.

4.2.3 Formulaire concernant l'action de Frobenius

A partir de maintenant et pour simplifier les énoncés, nous omettons de signaler le diviseur ∞ dans les notations du faisceau $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}$ sur \mathcal{X} et sur \mathcal{X}' . Les calculs présentés ici sont généraux. Dans cette partie, \mathcal{X} est un schéma formel lisse, muni de coordonnées locales x_1, \dots, x_N , \mathcal{X}' est un relèvement du Frobenius de \mathcal{X} , tel qu'il existe une flèche $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$, relevant le Frobenius $F : X_0 \rightarrow X'_0$. On note dans $\mathcal{P}_{\mathcal{X}, (m+1)}$ et dans $\mathcal{P}_{\mathcal{X}', (m)}$ respectivement les éléments $\underline{\xi}^{\{\underline{k}\}_{(m+1)}}$ et $\underline{\xi}'^{\{\underline{k}\}_{(m)}}$ correspondant aux x_i et aux x'_i . On note F^{-1} l'application entre les faisceaux d'anneaux : $F^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et qui fait de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -module libre de base les \underline{x}^λ où $\underline{\lambda}$ est un multi-indice dont les éléments sont compris entre 0 et p .

L'application Φ^* décrite plus haut se décrit comme suit. Il existe des sections locales de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, $\beta_{l,\underline{k}}$, telles que :

$$\Phi^*(\underline{\xi}^{\{l\}(m)}) = \sum_{\underline{k} \leq pl} \beta_{l,\underline{k}} \underline{\xi}^{\{k\}(m+1)}.$$

Nous donnons ici les formules définissant la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à gauche de $F^*\mathcal{E}$ où \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}' }^{(m)}$ -module à gauche, ainsi que la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à droite de $F^b\mathcal{E}$, si \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}' }^{(m)}$ -module à droite, en fonction des coefficients $\beta_{l,\underline{k}}$.

Formules pour la structure gauche. Commençons par la structure de module à gauche de $F^*\mathcal{E}$ où \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}' }^{(m)}$ -module à gauche. On note θ'_n les morphismes décrivant la m -PD-stratification de \mathcal{E} . Nous notons θ_n les morphismes définissant la $(m+1)$ -stratification de $F^*\mathcal{E}$. D'après 1.1.2, il suffit de calculer $\theta_n(1 \otimes e)$.

Soit e une section locale de \mathcal{E} . La m -PD-structure de \mathcal{E} est donnée par

$$\theta'_n(e) = \sum_{|l| \leq n} \underline{\partial}'^{(l)(m)}(e) \otimes \underline{\xi}^{\{l\}(m)}.$$

Ce qui donne :

$$\theta_n(1 \otimes e) = \sum_{|l| \leq n} \sum_{\underline{k} \leq pl} \beta_{l,\underline{k}} 1 \otimes \underline{\partial}'^{(l)(m)}(e) \otimes \underline{\xi}^{\{k\}(m+1)}$$

On en tire :

$$\underline{\partial}^{(l)(m+1)}(1 \otimes e) = \sum_{|l| \leq n} \sum_{pl \geq pk} \beta_{l,\underline{k}} 1 \otimes \underline{\partial}'^{(l)(m)}(e) \quad (2)$$

Formules pour la structure droite. Passons désormais aux modules à droite. On suppose que la m -PD-costratification sur \mathcal{E} est donnée par des applications ε'_n . On note p'_0, p'_1 , resp. p_0, p_1 , les projections $\text{spec } \mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}^n \rightarrow \mathcal{X}'$ vu comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -modules à gauche et à droite, (resp. les projections $\text{spec } \mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n \rightarrow \mathcal{X}$).

En coordonnées locales, et si on choisit une base duale de $p'_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}^n$, notée $\tilde{\underline{\partial}}^{\{k\}(m)}$ de la base des $\xi^{\{k\}(m)}$ on peut identifier $p'^b_0(\mathcal{E})$ et $p'^b_1(\mathcal{E})$ respectivement à $\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}',n}^{(m)}$ et $p^b_1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes \mathcal{E}$. On adopte des notations analogues au rang $m+1$. De cette façon, les applications ε'_n s'expriment comme suit : (cf 1.1.6.1 de [4])

$$\varepsilon_n(x \otimes \underline{\partial}^{\{k\}(m)}) = \sum_{\underline{h} < \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \tilde{\underline{\partial}}^{\{h\}(m)} \otimes x \underline{\partial}^{\{k-h\}(m)}.$$

On note encore $y_{\underline{\mu}}$ la base duale dans $F^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}'})$ de la base des $\underline{x}^{\underline{\lambda}}$. Le calcul nécessite plusieurs étapes.

i Commençons par identifier

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, F^b\mathcal{E}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, \mathcal{E}).$$

Le premier terme s'identifie à

$$F^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)},$$

et l'isomorphisme est donné par $y_{\underline{\lambda}} \otimes e \otimes \underline{\partial}^{\{\underline{k}\}}_{(m+1)} \mapsto (f\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}})_{(m+1)} \mapsto y_{\underline{\lambda}}(f)\delta_{\underline{k},\underline{k}'e}$.

On note $v_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ cette dernière application.

ii On identifie ensuite

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(p_{0*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}^n}(\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, p_0^b \mathcal{E}),$$

par une application qui envoie $v_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ sur $w_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ défini par,

$$\begin{aligned} w_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(f\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}})_{(m+1)}(\underline{\xi}'^{\{\underline{l}\}})_{(m)} &= v_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(f\Phi^*(\underline{\xi}'^{\{\underline{l}\}})_{(m)})\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}}_{(m+1)} \\ &= v_{\underline{\lambda},\underline{k},e} \left(f \sum_{|\underline{l}'| \leq n, |\underline{k}''| \leq n} \beta_{\underline{l},\underline{k}''} \left\{ \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}_{(m+1)} \underline{\xi}^{\{\underline{k}' + \underline{k}''\}}_{(m+1)} \right) \\ &= y_{\underline{\lambda}}(f\beta_{\underline{l},\underline{k}-\underline{k}'}) \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}_{(m+1)} e, \end{aligned}$$

de sorte que

$$w_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(f\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}})_{(m+1)} = \sum_{|\underline{l}'| \leq n} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_{\underline{\lambda}}(f\beta_{\underline{l},\underline{k}-\underline{k}'}) e \otimes \underline{\partial}'^{\{\underline{l}\}}_{(m)}.$$

iii Via ε_n et via l'identification

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{\mathcal{X}',(m)}^n}(\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, p_1^b \mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(p_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, \mathcal{E}),$$

l'homomorphisme $w_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ correspond à l'homomorphisme $w'_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ défini par

$$\begin{aligned} w'_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(f\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}})_{(m+1)} &= \sum_{|\underline{l}'| \leq n} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_{\underline{\lambda}}(f\beta_{\underline{l},\underline{k}-\underline{k}'}) \varepsilon'_n(e \otimes \underline{\partial}'^{\{\underline{l}\}}_{(m)})(1) \\ &= \sum_{|\underline{l}'| \leq n} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_{\underline{\lambda}}(f\beta_{\underline{l},\underline{k}-\underline{k}'}) (e \cdot \underline{\partial}'^{\{\underline{l}\}}_{(m)}). \end{aligned}$$

Il faut noter qu'à partir d'ici, le faisceau $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -module via la multiplication à droite. Les éléments $(\underline{x}^{\underline{\mu}} \otimes 1)\underline{\xi}^{\{\underline{k}'\}}_{(m+1)}$ ne forment plus une base de $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n$ pour cette structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -module.

iv Finalement, il nous faut identifier

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(p_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(p_{1*}\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m+1)}^n, F^b \mathcal{E}).$$

A l'homomorphisme $w'_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ correspond un homomorphisme $s_{\underline{\lambda},\underline{k},e}$ dont seule la valeur en 1 nous intéresse pour décrire la structure de module à droite sur $F^b \mathcal{E}$. Or, on a les égalités, pour tout multi-indice $\underline{\mu}$ dont toutes les composantes sont inférieures à $p-1$,

$$\begin{aligned} s_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(1)(\underline{x}^{\underline{\mu}}) &= w'_{\underline{\lambda},\underline{k},e}(1 \otimes \underline{x}^{\underline{\mu}}) \\ &= w' \left(\sum_{\underline{\gamma} \leq \underline{\mu}} \binom{\underline{\mu}}{\underline{\gamma}} (\underline{x} \otimes 1)^{\underline{\mu}-\underline{\gamma}} \underline{\xi}^{\underline{\gamma}} \right) \\ &= \sum_{|\underline{l}'| \leq n, \underline{\gamma} \leq \underline{\mu}} \binom{\underline{\mu}}{\underline{\gamma}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{\gamma} \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_{\underline{\lambda}}(\underline{x}^{\underline{\mu}-\underline{\gamma}} \beta_{\underline{l},\underline{k}-\underline{\gamma}}) (e \cdot \underline{\partial}'^{\{\underline{l}\}}_{(m)}). \end{aligned}$$

On en déduit finalement la formule qui décrit la structure de module à droite de $F^\flat \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(y_\lambda \otimes e) \otimes \underline{\partial}^{(k)}(m+1) &= (y_\lambda \otimes e) \cdot \underline{\partial}^{(k)}(m+1), \\ (y_\lambda \otimes e) \cdot \underline{\partial}^{(k)}(m+1) &= \sum_{|\underline{l}| \leq n, \underline{\mu} \leq \underline{\mu}} \sum_{\underline{\gamma} \leq \underline{\mu}} \binom{\underline{\mu}}{\underline{\gamma}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{\gamma} \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_\lambda(\underline{x}^{\underline{\mu} - \underline{\gamma}} \beta_{\underline{l}, \underline{k} - \underline{\gamma}}) y_{\underline{\mu}} \otimes (e \cdot \underline{\partial}'^{(\underline{l})}(m)). \end{aligned} \quad (3)$$

4.2.4 Quelques m -PD-algèbres apparaissant dans ce contexte.

On reprend ici les notations de 4.1. On considère l'algèbre de polynômes $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}[X_1, \dots, X_N]$ et $\mathcal{F}_{(m)}$, la m -PD-enveloppe de cette algèbre associée à l'idéal I engendré par les X_i . Avec les notations habituelles, cette algèbre est un $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module libre de base les éléments $\underline{X}^{\{\underline{l}\}(m)}$. On rappelle que cette algèbre est en particulier une PD-algèbre pour l'idéal $pI + I^{(p^m)}$, où $I^{(p^m)}$ est l'idéal engendré par les éléments x^{p^m} , pour $x \in I$. L'application $\tau : X_k \mapsto \xi_k$ pour tout $1 \leq k \leq N$ fait de cette algèbre, une sous- (m) -PD-algèbre de l'algèbre $j_* \mathcal{P}_{\mathcal{U}, (m)}^n$. En passant aux sections globales et en notant $B^{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, on voit que $F_{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F}_{(m)})$ est égale à

$$F_{(m)} = \bigoplus_{\underline{l}} B^{(m)} \underline{X}^{\{\underline{l}\}(m)}$$

et est une sous-algèbre à puissances divisées, via une application τ , de l'algèbre

$$G_{(m)} = \bigoplus_{\underline{l}} V\{x_1, \dots, x_N\} \xi^{\{\underline{l}\}(m)}.$$

Les objets analogues sur \mathcal{X}' seront notés $\mathcal{F}'_{(m)}$ et $F'_{(m)}$ et τ' .

4.2.5 Action du Frobenius sur l'espace affine dans un cas particulier.

On considère maintenant l'espace affine formel de dimension N sur \mathcal{V} , que l'on note \mathcal{U} , muni de coordonnées x_1, \dots, x_N , \mathcal{U}' une copie de \mathcal{U} muni des coordonnées x'_1, \dots, x'_N , et F le relèvement du Frobenius relatif de U_0 défini par $F^{-1}(x'_i) = x_i^p$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Pour étudier l'action du Frobenius sur $A_N(K)^\dagger$, il nous faut affiner un peu, dans un cas particulier où on a un relèvement bête du Frobenius, les résultats de Berthelot.

Pour démontrer 2.2.3 de [4], Berthelot décrit explicitement l'application Φ^* en coordonnées locales. Dans notre cas, ces formules donnent :

$$\Phi^*(\xi'_i) = \xi_i^p + p \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{k,p} x_i^{p-k} \xi_i^k,$$

où $\alpha_{k,p}$ est l'entier $1/p \cdot \binom{p}{k}$. Notons $u = \Phi^*(\xi') - \xi^p$, et plus généralement, $\beta_{k,n} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ les coefficients qui apparaissent dans la décomposition

$$\Phi^*(\xi_i^{\{n\}(m)}) = \xi_i^{\{pn\}(m+1)} + \sum_{k < pn} \beta_{n,k} \xi_i^{\{k\}(m+1)}.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 4.2.5.1. *L'homomorphisme Φ^* défini par Berthelot induit un PD-morphisme Ψ^* entre les faisceaux $\mathcal{F}_{(m)}$ et $\mathcal{F}_{(m+1)}$, ainsi qu'entre leurs sections globales.*

Démonstration. Nous reprenons les notations précédentes. Comme Φ^* induit un isomorphisme entre les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}'}^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}}^{(m+1)}$, il suffit de montrer que, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\Phi^*(\xi_i^{\{n\}_{(m)}}) \in \mathcal{F}_{(m+1)}$, pour tout entier n . Fixons i . Pour alléger les notations, nous notons $\xi = \xi_i$, $\xi' = \xi'_i$, $u = u_i$ dans la suite de la démonstration. Traitons d'abord le cas où $m \geq 1$.

La formule ci-dessus montre que $\Phi^*(\xi') \in \mathcal{F}_{(m+1)}$ (car les coefficients des x^{p-k} sont de valuation 1), c'est donc aussi le cas pour $n \leq p^m$ car alors $\Phi^*(\xi^{\{n\}_{(m)}}) = \Phi^*(\xi')^n$. En général, on décompose $n = p^m q + r$ avec $r < p^m$, ce qui donne l'égalité :

$$\Phi^*(\xi^{\{n\}_{(m)}}) = \Phi^*(\xi')^r [\Phi^*(\xi')^{p^m}]^{[q]}.$$

Pour voir que cet élément est dans $\mathcal{F}_{(m+1)}$, il suffit de voir que $\Phi^*(\xi')^{p^m}$ est un élément du PD-idéal de la m -PD-algèbre $\mathcal{F}_{(m+1)}$, puisque $\mathcal{F}_{(m+1)}$ est une sous-PD-algèbre $G_{(m+1)}$. Supposons d'abord que $m \geq 1$.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi^*(\xi')^{p^m} &= (\xi^p + u)^{p^m} \\ &= \xi^{p^{m+1}} + \sum_{l=1}^{p^m-1} \binom{p^m}{l} \xi^{lp} u^{p^m-l} + u^{p^m}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq l \leq p^m - 1$,

$$v_p \left(\binom{p^m}{l} \right) \geq 1,$$

si bien que la quantité

$$\xi^{p^{m+1}} + \sum_{l=1}^{p^m-1} \binom{p^m}{l} \xi^{lp} u^{p^m-l},$$

est un élément de $I^{p^{m+1}} + pI$. On a d'autre part l'égalité

$$\begin{aligned} u^{p^m} &= \left[\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x_i^{p-k} \xi^k \right]^{p^m} \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_{p^m}) \mid \forall r, 1 \leq k_r \leq p-1} \prod_r \binom{p}{k_r} x_i^{p^{m+1}-|k|} \xi^{|k|}. \end{aligned}$$

Pour tous les termes de ce produit, on observe :

$$v_p \left(\prod_r \binom{p}{k_r} \right) \geq 2,$$

de sorte que u^{p^m} est dans pI .

Supposons maintenant que $m = 0$. Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\Phi^*(\xi'^n) \in \mathcal{F}_1.$$

Or, on a l'égalité :

$$\Phi^*(\xi'^n) = (\xi^p + u)^n = \sum_{i+j=n} (\xi^p)^{[i]} u^{[j]}.$$

Comme les éléments $(\xi^p)^{[i]}$ sont dans \mathcal{F}_1 , il suffit de vérifier que, pour tout entier naturel j , les éléments $u^{[j]}$ sont dans \mathcal{F}_1 . Fixons j et notons $A = \{1, \dots, p-1\}^j$. Pour un multi-indice $\underline{\alpha}$ élément de A , on note $r_{\underline{\alpha}}$ et $s_{\underline{\alpha}}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $|\underline{\alpha}|$ par p .

Décomposons

$$\begin{aligned} u^j &= (\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x_i^{p-k} \xi^k) \dots (\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x_i^{p-k} \xi^k) \quad (\text{j termes}) \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in A} \prod_{t=1}^j \binom{p}{\alpha_t} x^{jp - |\underline{\alpha}|} \xi^{s_{\underline{\alpha}}} \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in A} r_{\underline{\alpha}}! \prod_{t=1}^j \binom{p}{\alpha_t} x^{jp - |\underline{\alpha}|} \xi^{s_{\underline{\alpha}}} (\xi^p)^{[r_{\underline{\alpha}}]}. \end{aligned}$$

Finalement, l'élément $u^{[j]}$ est dans \mathcal{F}_1 si et seulement si la valuation du coefficient de $x^{jp - |\underline{\alpha}|}$ est supérieure à $\nu_1(jp - |\underline{\alpha}|) + v_p(j!)$ i.e. si et seulement si

$$\gamma(p, j) = j + v_p(r_{\underline{\alpha}}!) - vp(j!) - \nu_1(jp - |\underline{\alpha}|) \geq 0,$$

pour tout multi-indice $\underline{\alpha}$ dans A . Notons que pour $j = 1$, et $j = 2$ avec $p \geq 3$, il est vrai que $u \in \mathcal{F}_1$ puisque $u \in \mathcal{F}_1$.

Par définition, on a l'encadrement : $1 \leq \alpha_t \leq p-1$. A partir des inégalités 1.1.2, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} r_{\underline{\alpha}} &> |\underline{\alpha}|/p - 1 \\ vp(r_{\underline{\alpha}}!) &\geq \frac{j-p}{p(p-1)} - \log_p \left(\frac{p-1}{p} j + 1 \right) - 1, \\ -vp(j!) &\geq -\frac{j}{p-1}, \\ -\nu_1(jp - |\underline{\alpha}|) &\geq -\frac{j(p-1)}{p^2} - 1. \end{aligned}$$

Posons $c = \frac{p-1}{p}$. On en tire, pour tous p et tout j , la minoration suivante :

$$\gamma(p, j) \geq c^2 j - \frac{\text{Log}(cj + 1)}{\text{Log}(p)} - 2,$$

où Log est la fonction logarithme népérien. Notons $m(j, p)$ ce minorant. Si p est compris entre 2 et 11, $m(j, p)$ est minoré par

$$m(j, p) \geq \frac{j}{4} - \frac{\text{Log}(\frac{10}{11}j + 1)}{\text{Log}2} - 2,$$

quantité qui est strictement positive pour $j > 27$.

En écrivant $\text{Log}(x+1) \leq x/4 - 3/4 + 2\text{Log}(2)$, on trouve, pour $j \geq 3$: $\gamma(p, j) \geq G(p)$, où

$$G(p) = 3 \left(c^2 - \frac{c}{4\text{Log}(p)} \right) + \frac{3 - 8\text{Log}(2)}{4\text{Log}(p)} - 2.$$

On observe que $G(p) \geq G(13) > 0$ pour $p \geq 13$.

Finalement, cela nous ramène à montrer que $\gamma(p, j) \geq 0$ pour $2 \leq p \leq 11$ et $3 \leq j \leq 26$, et pour $p = 2$ et $j = 2$, pour lesquels on calcule la valeur exacte avec une bonne machine à calculer.

D'où finalement la proposition. Nous utiliserons seulement le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.5.2. *Les coefficients $\beta_{n,k}$ introduits en 4.2.3, sont des éléments de $B^{(m+1)}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'on a le diagramme suivant, en passant aux sections globales,

$$\begin{array}{ccc} F'_{(m)} = \bigoplus B'^{(m)} \underline{X}'^{(m)} & \xrightarrow{\tau'} & j'_* \mathcal{P}_{\mathcal{U}'}^{(m)} \\ & \downarrow \Psi^* & \downarrow \Phi^* \\ F_{(m+1)} = \bigoplus B^{(m+1)} \underline{X}^{(m+1)} & \xrightarrow{\tau} & j_* \mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{(m+1)}, \end{array}$$

et d'autre part, $\xi'^{\{n\}(m)} = \tau'(X^{\{n\}(m)})$. Cela nous permet de montrer que F^* et F^\flat s'étendent en un foncteur de la catégories des $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules vers la catégorie des $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -modules.

Pour l'énoncé qui suit, on considère les structures droite et gauche de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$ auxquelles on référera par un d ou un g .

Corollaire 4.2.6. *i Les faisceaux $F_g^* \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$, $F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$, $F_g^* F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ sont respectivement munis de structures canoniques de $(\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}, \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)})$ -bimodule, de $(\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}, \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)})$ -bimodule, et de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -bimodule; de plus, l'homomorphisme canonique*

$$F_g^* F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)} \rightarrow F_g^* \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)} \text{ (resp. } F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)} \rightarrow F_g^* F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)})$$

est $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -linéaire à gauche (resp. à droite), et identifie localement $F_g^ \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ (resp. $F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$) à un facteur direct de $F_g^* F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ sur $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$.*

Démonstration. Pour la première assertion de (i), on montre en fait que le faisceau $F_g^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ est un $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à gauche. L'assertion s'en déduit par passage aux complétés. Pour montrer cela, observons que les faisceaux $F_g^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ sont des sous-faisceaux de $F_g^* j_* \mathcal{D}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ et $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ respectivement. Or, l'on sait que $F_g^* j_* \mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ est un $j_* \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ -module à gauche d'après (2.2.3, 2.4.1 et 2.5.2) de [4]. Comme $F_g^* \mathcal{B}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ s'identifie à $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$, il suffit de vérifier que l'action des opérateurs $\partial^{\langle k \rangle (m+1)}$ laisse stable $F_g^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$. Soit e une section locale de $\mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$, d'après le corollaire précédent et la formule 2 du paragraphe 4.2.3, $\partial^{\langle k \rangle (m+1)}(1 \otimes e)$ est une section locale de $F_g^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$. Soit f une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}$, alors la formule 1 du paragraphe 1.1.2 montre que $\partial^{\langle k \rangle (m+1)}(f \otimes e) \in F_g^* \mathcal{A}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$.

Montrons maintenant que $F_d^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$ -module à droite. Comme précédemment, ces deux faisceaux sont des sous-faisceaux de leur restriction à \mathcal{U} (4.1.2 de [4]), pour lesquels l'assertion est vraie. Il faut vérifier que le faisceau $F^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ est stable par l'action de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m+1)}$. En outre, le faisceau $F^\flat \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}$ s'identifie à

$$F^\flat(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)}} \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)},$$

où le faisceau $F^\flat(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}', \mathbf{Q}}^{(m)})$ est libre de base les éléments $y_{\underline{\lambda}}$ d'après 4.2.1.

Soient $P = \sum a_{\underline{l}'} \underline{\partial}^{(\underline{l}')}(m)$ et $Q = \sum b_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(\underline{k})}(m+1)$ des éléments de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$ respectivement. La formule 3 du paragraphe 4.2.3 donne l'action à droite sur $F^{\flat} \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ des opérateurs $\underline{\partial}^{(\underline{k})}(m+1)$ en restriction à \mathcal{U} . Cette formule donne

$$(y_{\underline{\lambda}} \otimes P) \cdot \underline{\partial}^{(\underline{k})}(m+1) = \sum_{|\underline{l}| \leq n, \underline{\mu}} \sum_{\underline{\gamma} \leq \underline{\mu}} \binom{\underline{\mu}}{\underline{\gamma}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{\gamma} \end{matrix} \right\}_{(m+1)} y_{\underline{\lambda}}(x^{\underline{\mu}-\underline{\gamma}} \beta_{\underline{l}, \underline{k}-\underline{\gamma}}) y_{\underline{\mu}} \otimes (P \cdot \underline{\partial}^{(\underline{l})}(m)),$$

avec

$$P \underline{\partial}^{(\underline{l})}(m) = \sum_{\underline{l}'} a_{\underline{l}'} \left\langle \begin{matrix} \underline{l} + \underline{l}' \\ \underline{l} \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \underline{\partial}^{(\underline{l}+\underline{l}')}(m).$$

Comme les éléments $\beta_{\underline{l}, \underline{k}-\underline{\gamma}}$ sont dans $\widehat{B}^{(m+1)}$, ils se décomposent tous sous la forme $\sum_{\underline{r}} F^{-1}(U_{\underline{r}}) \underline{x}^{\underline{r}}$, d'après 4.2.1, où les éléments $\pi^{4N} U_{\underline{r}}$ sont dans $\widehat{B}^{(m)}$. Ceci implique que les éléments $\pi^{4N} y_{\underline{\lambda}} \otimes P \cdot \underline{\partial}^{(\underline{k})}(m+1)$ sont dans $F^{\flat} \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$. Comme conséquence, on voit que $\pi^{4N} y_{\underline{\lambda}} \otimes P \cdot Q \in F^{\flat} \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$, d'où le résultat.

Le fait que les flèches c_m sont scindées provient du fait que les flèches $F_g^* F^{\flat} \mathcal{B}_{\mathcal{X}', \mathcal{Q}}^{(m)} \rightarrow F^{\flat} \mathcal{B}_{\mathcal{X}', \mathcal{Q}}^{(m)}$ sont scindées. Les autres assertions résultent facilement de ce qui précède.

Corollaire 4.2.7. *Pour tout $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathcal{Q}}^{(m)}$ -module à gauche cohérent \mathcal{E}' (resp. tout $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}', \mathcal{Q}}^{(m)}$ -module à droite cohérent \mathcal{M}'), $F^* \mathcal{E}'$ est muni d'une structure fonctorielle de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathcal{Q}}^{(m+1)}$ -module à gauche ($F^{\flat} \mathcal{E}'$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}, \mathcal{Q}}^{(m+1)}$ à droite).*

La démonstration est la même à gauche qu'à droite. Nous la donnerons seulement pour un module à gauche \mathcal{E} et pour $F^* \mathcal{E}$. Pour simplifier les notations, nous noterons $\mathcal{D}' = \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ et $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$. On peut d'abord remarquer que si u est un homomorphisme \mathcal{D}' -linéaire : $\mathcal{D}'^a \rightarrow \mathcal{D}'^c$, alors $F^* u$ est \mathcal{D} -linéaire. Cela provient du fait que la linéarité de u est vraie en restriction à l'ouvert \mathcal{U} , d'après les résultats de Berthelot. De plus, le faisceau \mathcal{D}' est un sous-faisceau de $j_* \mathcal{D}'$.

Si \mathcal{E} admet deux résolutions globales sur \mathcal{X}

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'^a &\xrightarrow{u} \mathcal{D}'^c \xrightarrow{s} E, \\ \mathcal{D}'^d &\xrightarrow{u'} \mathcal{D}'^e \xrightarrow{s'} E. \end{aligned}$$

Il existe un homomorphisme $\lambda : \mathcal{D}'^c \rightarrow \mathcal{D}'^e$ tel que $s' \circ \lambda = s$.

La structure de \mathcal{D} -module sur $F^* \mathcal{E}$ donnée par $F^* u$ concide avec celle donnée par $F^* u'$. Cela définit donc une structure de \mathcal{D} -module canonique sur $F^* \mathcal{E}$.

Nous terminons par l'analogie du théorème de platitude de Berthelot (4.3.5 de [3]).

4.3 Un théorème de platitude pour la complétée faible de l'algèbre de Weyl.

L'énoncé du résultat est le suivant.

Proposition 4.3.1. *L'algèbre $A_N(K)^{\dagger}$ est une algèbre plate à droite et à gauche sur $\widehat{C}_{\mathcal{Q}}^{(m)}$.*

Le problème est de montrer que $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est plat à droite et à gauche sur $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$. La difficulté est double : nous étudions d'abord ce qui se passe lorsque l'on passe des coefficients $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ aux coefficients $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$, puis nous étudions le passage des opérateurs $\underline{\partial}^{(\underline{k})}_{(m)}$ aux opérateurs $\underline{\partial}^{(\underline{k})}_{(m+1)}$. Dans tout ce qui suit, nous nous sommes très largement inspirés des techniques de Berthelot pour montrer les théorèmes de platitude figurant dans [3].

Soit $C^{(m)}$ la sous- V -algèbre de $\Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^{(m)})$, libre comme V -module, de base les $p^{\nu_m(l)} \underline{x}^l \underline{\partial}^{(\underline{k})}_{(m)}$. Du fait que $\nu_m(l) - \nu_m(|l|)$ est majoré par N , il est clair que l'algèbre $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$, qui est a priori une sous-algèbre de $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$, coïncide avec cette dernière. En fait, nous allons montrer que $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est plate à droite et à gauche sur $\widehat{C}'_{\mathbf{Q}}^{(m)}$.

4.3.2 Passage des coefficients $\mathcal{B}^{(m)}$ à $\mathcal{B}^{(m+1)}$.

Dans cette partie, nous fixons un entier m et nous notons $C = C^{(m)}$. Pour tout $0 \leq i \leq N$, nous pouvons considérer des algèbres de coefficients

$$T^i = \left\{ \sum_{\underline{l}} V p^{\nu_{m+1}(l_1, \dots, l_i) + \nu_m(l_{i+1}, \dots, l_N)} \underline{x}^{\underline{l}} \right\}.$$

Introduisons

$$F^{(m)} = \left\{ \sum_{\underline{l}, \underline{k}} V p^{\nu_{m+1}(l)} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{(\underline{k})}_{(m)} \right\},$$

et, pour tout entier $0 \leq i \leq N$,

$$D^i = \left\{ \sum_{\underline{l}, \underline{k}} V p^{\nu_{m+1}(l_1, \dots, l_i) + \nu_m(l_{i+1}, \dots, l_N)} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{(\underline{k})}_{(m)} \right\}.$$

Nous noterons $C_1^{(m)} = D^N$. On vérifie facilement que $F^{(m)}$ et les modules D^i sont des sous-algèbres de $C^{(m+1)}$. En particulier, nous avons une suite croissante de C -algèbres :

$$C \subset D^1 \subset \dots \subset D^{N-1} \subset D^N.$$

Les propriétés de finitude de toutes ces algèbres intermédiaires sont données par le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. (i) *Les V -algèbres T^i sont noethériennes.*

(ii) *Pour tout $0 \leq i \leq N$, les algèbres D^i sont noethériennes à gauche et à droite. En outre, l'algèbre graduée pour la filtration par les opérateurs différentiels $\text{gr}_{\bullet} D^i$ est une algèbre commutative noethérienne.*

Démonstration. Pour le (i), il suffit de montrer que l'algèbre T^i est de type fini. Si $B_{\mathcal{X}}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{B}^{(m)})$, on a l'égalité $T^i = \otimes_1^i B_{X_1}^{(m+1)} \otimes_{i+1}^N B_{X_1}^{(m)}$, où X_1 est la droite projective formelle sur V . Or l'algèbre $B_{X_1}^{(m)}$ est de type fini, engendrée par $\{px^l \text{ tels que } l \leq p^{m+1}\}$. La filtration par l'ordre des opérateurs différentiels de $\Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^{(m)})$ induit une filtration

sur les algèbres D^i , dont le gradué est bien entendu commutatif. Les algèbres graduées sont des T^i -algèbres de type fini, engendrée par les classes dans le gradué des opérateurs $\partial_r^{(r)(m)}$ pour $0 \leq r \leq p^m$. D'où le (ii).

Le résultat clé est le suivant.

Proposition 4.3.4. *L'algèbre $\widehat{C}_{1, \mathbf{Q}}^{(m)}$ est plate à droite et à gauche sur l'algèbre $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$.*

Démonstration. Compte tenu de la filtration précédente, il suffit de montrer que les algèbres $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^i$ sont plates à droite et à gauche sur $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{i-1}$, pour tout $i \geq 1$. Fixons désormais i . On introduit

$$A^i = \widehat{D}^{i-1} + D^i.$$

Remarquons que A^i est un anneau. Pour cela, il suffit de vérifier que $\widehat{D}^{i-1} \cdot D^i \subset A^i$ et que $D^i \cdot \widehat{D}^{i-1} \subset A^i$. Soient $(Q, R) \in \widehat{D}^{i-1} \times D^i$. Il existe un entier s tel que $p^s R \in D^{i-1}$. De plus, il existe $(T, S) \in D^i \times \widehat{D}^{i-1}$ tels que $Q = T + p^s S$. On a donc l'égalité $Q \cdot R = T \cdot R + S \cdot (p^s R) \in A^i$. De même, $R \cdot Q$ est dans A^i et A^i est un sous-anneau de $\Gamma(\mathcal{U}_0, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$.

Montrons ensuite que le complété p -adique de A^i est l'algèbre \widehat{D}^i . Il existe un morphisme canonique $\varphi : D^i/p^k D^i \rightarrow A^i/p^k A^i$. Vérifions que φ est surjectif. Si $P = Q + R$, avec $Q \in \widehat{D}^{i-1}$ et $R \in D^i$, Q s'écrit $U + p^k V$ où $U \in D^{i-1}$ et $V \in \widehat{D}^{i-1}$. En particulier, $p^k V$ est dans $p^k A^i$, et la classe de $Q \bmod p^k A$ est égale à $\varphi(R + U \bmod p^k D^i)$. Soit de plus $P \in D^i$ tel que $P \in p^k A^i$. Décomposons $P = p^k(T + R)$, où $(T, R) \in \widehat{D}^{i-1} \times D^i$. Notons $r_{l,k}$, $p_{l,k}$, $t_{l,k}$ les coefficients respectifs de R , P et T dans la V -base des $p^{\nu_{m+1}(l_1, \dots, l_i) + \nu_m(l_{i+1}, \dots, l_N)} \underline{x}^l \underline{\partial}^{(k)(m)}$. L'égalité qui relie P , T et R donne que la famille des $t_{l,k}$ est presque nulle et $T \in D^i$, c'est-à-dire que $P \in p^k D^i$.

D'autre part, si $P \in D^i$, il existe un entier s tel que $p^s P \in D^{i-1}$. Cela nous dit que $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{i-1} \simeq A_{\mathbf{Q}}^i$. D'après les énoncés généraux sur la complétion rappelés dans [3], l'assertion de platitude résultera du fait que l'anneau A^i est noethérien, ce qui fait l'objet de la suite.

Introduisons la filtration suivante de A^i , définie pour tout $s \in \mathbf{N}$:

$$F^s = \sum_{l \leq s} V p^{\nu_{m+1}(l)} x_i^l \widehat{D}^{i-1}.$$

Lemme 4.3.5. *Pour tout entier s , F^s est un \widehat{D}^{i-1} -module à gauche.*

Démonstration. Partons de la relation

$$\underline{\partial}^{(k)(m)} p^{\nu_{m+1}(l)} x_i^l = p^{\nu_{m+1}(l)} \sum_{\underline{t}' + \underline{t}'' = k} \left\{ \begin{matrix} k \\ \underline{t}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{(\underline{t}')(m)}(x_i^l) \underline{\partial}^{(\underline{t}'')(m)}.$$

On en déduit que $\underline{\partial}^{(k)(m)} \cdot F^s \subset F^s$. Or, F^s est p -adiquement complet car c'est un module à droite de type fini sur \widehat{D}^{i-1} , qui est un anneau noethérien complet. Par passage aux complétés, il vient $\widehat{D}^{i-1} \cdot F^s \subset F^s$. D'où le lemme.

Proposition 4.3.6. *L'anneau A^i est noethérien.*

Démonstration. Comme F^s est un \widehat{D}^{i-1} -module à gauche, on a l'inclusion suivante $F^s \cdot F^t \subset F^{s+t}$. De plus, F^0 est égal à \widehat{D}^{i-1} et $\bigcup_s F^s$ à A^i . Remarquons encore que $p \cdot p^{\nu_{m+1}(s)} x_i^s = p^{\nu_{m+1}(s)} x_i^{s-1} (p x_i) \in F^{s-1}$. Finalement, pour tout $s \geq 0$, les modules $\text{gr}_F^{s+1}(A^i)$ sont annulés par p . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{pgr}_F^\bullet(A^i) \rightarrow \text{gr}_F^\bullet(A^i) \rightarrow \text{gr}_F^\bullet(A^i)/\text{pgr}_F^\bullet(A^i) \rightarrow 0.$$

L'idéal $\text{pgr}_F^\bullet(A^i)$ s'identifie à \widehat{D}^{i-1} et la structure de $\text{gr}_F^\bullet(A^i)$ -module est induite par la structure de \widehat{D}^{i-1} -module de \widehat{D}^{i-1} . En particulier, comme $\text{gr}_F^\bullet(A^i)$ -module à gauche et à droite, $\text{pgr}_F^\bullet(A^i)$ est noethérien. Nous allons maintenant montrer que $H = \text{gr}_F^\bullet(A^i)/\text{pgr}_F^\bullet(A^i)$ est une algèbre noethérienne.

Il existe un isomorphisme canonique

$$H \simeq D^{i-1}/pD^{i-1} \oplus \bigoplus F^{s+1}/F^s.$$

Cet anneau est muni d'une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels. En effet, D^{i-1}/pD^{i-1} est naturellement muni d'une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels notée $G^{0,t}$ pour $t \in \mathbf{N}$ et, pour $s \geq 1$, on dispose d'une application

$$\begin{aligned} \lambda_s &: D^{i-1}/pD^{i-1} &\rightarrow & F^s/F^{s-1} \\ &\overline{R} &\mapsto & \overline{p^{\nu_{m+1}(s)} x^s R}. \end{aligned}$$

Cette application est surjective. En effet, soit $P \in F^s$, il existe $Q \in \widehat{D}^{i-1}$ tel que, *modulo* F^{s-1} , P soit égal à $p^{\nu_{m+1}(s)} x^s Q$. Or, il existe $(T, R) \in \widehat{D}^{i-1} \times D^{i-1}$ tel que $Q = R + pT$. L'élément P est donc égal à $p^{\nu_{m+1}(s)} x^s R$ *modulo* F^{s-1} . Notons Fil_t la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels sur D^{i-1}/pD^{i-1} . Posons $G^{s,t} = \lambda_s(\text{Fil}_t(D^{i-1}/pD^{i-1}))$ et

$$G^t = \bigoplus_{s \in \mathbf{N}} G^{s,t}.$$

Pour s fixé, la filtration $G^{s,t}$ est croissante, exhaustive et $G^{s,t} \cdot G^{s,t'} \subset G^{s,t+t'}$. Bien entendu, les mêmes propriétés sont vraies pour la filtration par les G^t . Pour montrer que H est noethérienne, il suffit de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.3.7. *L'algèbre $\text{gr}_G H$ est noethérienne.*

Démonstration. Soit $\Delta^i = \text{gr}_G H$ cette algèbre et $A^i = \text{gr}_G(D^{i-1}/pD^{i-1})$ (dont on a déjà vu en 4.3.3, que c'est une algèbre noethérienne). L'algèbre Δ^i est bigraduée par définition.

$$\Delta^i = \bigoplus_{(s,t) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} G^{s,t+1}/G^{s,t}.$$

En fait, l'algèbre Δ^i est une algèbre commutative. En effet, soient $(P, Q) \in G^{s,t} \times G^{s',t'}$. Il existe $(R, S) \in D^{i-1}/pD^{i-1} \times D^{i-1}/pD^{i-1}$ tels que $P = \lambda_s(R)$ et $Q = \lambda_{s'}(S)$. De plus, ces opérateurs sont d'ordre t et t' respectivement. Alors, on a l'égalité $PQ - QP = p^{\nu_{m+1}(s+s')} x_i^{s+s'} (RS - SR) \text{ mod } F^{s+s'-1}$. L'opérateur $RS - SR$ est d'ordre $t + t' - 1$, donc $[P, Q]$ est nul dans Δ^i , ce qui montre que cette algèbre est commutative.

Soit maintenant $f \in A^i$ tel que $f \in F^s$ mais $f \notin F^{s-1}$, et $f \in G^{s,t}$ mais $f \notin G^{s-1,t}$. La classe de f modulo F^{s-1} , puis modulo $G^{s,t-1}$ sera notée $(f)_{s,t}$. Soit Λ la sous- A^i -algèbre de Δ^i engendrée par les éléments $(px_i)_{1,0}, \dots, (px_i^{p^{m+2}})_{p^{m+2},0}$. Tout élément de $G^{s,t}$ s'écrit $(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0}R$, où $R \in A^i$. Pour montrer que Δ^i coïncide avec Λ , il suffit donc de voir que $(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0} \in \Lambda$, ce qu'on peut voir par récurrence sur s en utilisant la formule pour $s \geq p^{m+2}$.

$$(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0} = (p^{\nu_{m+1}(s-p^{m+2})}x_i^{s-p^{m+2}})_{s-p^{m+2},0} \cdot (px_i^{p^{m+2}})_{p^{m+2},0}.$$

En conclusion l'algèbre Δ^i est une A^i -algèbre de type fini, donc noethérienne. Par suite, l'algèbre H est noethérienne, ainsi que A^i .

La même méthode de démonstration fournit une variante de ce résultat.

Corollaire 4.3.8. *Pour $m'' \geq m'$, l'algèbre $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m''+1,m)}$ est plate à droite et à gauche sur $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m'+1,m)}$.*

4.3.9 Passage des opérateurs de niveau m aux opérateurs de niveau $m+1$.

Lemme 4.3.10. *L'algèbre $\widehat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$ est plate à droite et à gauche sur $\widehat{C}_{1,\mathbf{Q}}^{(m)}$.*

Démonstration. On procède comme pour la démonstration du théorème 3.5.3 de [3]. Introduisons le sous-anneau de $\widehat{C}^{(m+1)}$, $R^{(m)} = \widehat{C}_1^{(m)} + C^{(m+1)}$; soit $P \in C^{(m+1)}$, il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $p^s P$ soit dans $\widehat{C}_1^{(m)}$, de sorte que $R^{(m)}$ est un anneau. En outre, tout élément de $\widehat{C}_1^{(m)}$ s'écrit d'une unique façon :

$$P = \sum_{\underline{l}, \underline{k}} a_{\underline{l}, \underline{k}} p^{\nu_{m+1}(|\underline{l}|)} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{(\underline{k})} \text{ où } |a_{\underline{l}, \underline{k}}| \rightarrow 0 \text{ si } |\underline{l}| + |\underline{k}| \rightarrow +\infty.$$

On montre alors, comme dans 3.5.3 de [3], que les complétés $\widehat{R}^{(m)}$ et $\widehat{C}^{(m+1)}$ sont isomorphes. De plus, on voit facilement que les localisés $\widehat{R}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ et $\widehat{C}_{1,\mathbf{Q}}^{(m)}$ sont isomorphes, ce qui nous ramène à montrer que $R^{(m)}$ est noethérien à droite et à gauche. On se contentera de montrer que $R^{(m)}$ est noethérien à gauche. La remarque décisive de la démonstration du théorème 3.5.3 de [3] est aussi valable dans le cas des coefficients de T^N (avec les notations de 4.3.2). En effet, pour tout $b \in T^N$, on a dans $C^{(m+1)}$:

$$\left[\partial_{x_j}^{[p^{m+1}]}, b \right] = \sum_{i < p^{m+1}} \binom{p^{m+1}}{i} \partial_{x_j}^{[p^{m+1}-i]}(b) \otimes \partial_{x_j}^{[i]}.$$

Comme conséquence, si $P \in \widehat{C}^{(m)}$, on a la relation :

$$\left[\left(\partial_{x_j}^{[p^{m+1}]} \right)^k, P \right] \in \sum_{i < k} \widehat{C}^{(m)} \cdot \left(\partial_{x_j}^{[p^{m+1}]} \right)^i.$$

En outre, d'après 2.2.5 de [3], $R^{(m)}$ est engendré comme $\widehat{C}_1^{(m)}$ -module par les éléments

$$\left(\partial_{x_1}^{[p^{m+1}]} \right)^k, \dots, \left(\partial_{x_N}^{[p^{m+1}]} \right)^k.$$

Le reste de la démonstration est alors tout à fait identique à la fin de celle du théorème 3.5.3 de [3].

On peut filtrer R par le sous-anneau R'_j engendré par $\widehat{C}_{1,\mathbf{Q}}^{(m)}$ et les $\partial_{x_l}^{[p^{m+1}]}$ pour $l \leq j$ et $k \in \mathbf{N}$. Il s'agit alors de montrer par récurrence sur j que R'_j est noethérien, sachant que $\widehat{C}_{1,\mathbf{Q}}^{(m)}$ est noethérien comme complété d'un anneau noethérien. Soient $\partial' = \partial_{x_j}$, I un idéal à gauche de R'_j et $P \in I$. Cet élément P peut s'écrire

$$P = A\partial'^r + \sum_{i < r} A_i \partial'^i,$$

avec A, A_i des éléments de R'_{j-1} . Introduisons J l'idéal à gauche de R'_{j-1} des éléments A tels qu'il existe $P \in I$ vérifiant

$$P = A\partial'^r + \sum_{i < r} A_i \partial'^i.$$

Soient maintenant A_1, \dots, A_s des générateurs de J et P_k des éléments de I tels que

$$P_k = A_k \partial'^r + \sum_{i < r} A_{k,i} \partial'^i.$$

Soit $r = \max\{r_k\}$, et M le sous-module de R'_{j-1} engendré par $\partial', \dots, \partial'^r$. Alors $I \cap M$ est un sous-module de type fini engendré par des éléments Q_1, \dots, Q_t et on obtient une famille de générateurs de I en prenant $Q_1, \dots, Q_t, P_1, \dots, P_s$.

Références

- [1] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de Géométrie Algébrique, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, 4e partie. *Publ. Math. I.H.E.S.*, **32**, 1967.
- [2] P. Berthelot. Cohomologie rigide et théorie des \mathcal{D} -modules. Proc. Conf. p -adic Analysis, (Trento 1989). *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, **1454**, p. 78–124, 1990.
- [3] P. Berthelot. \mathcal{D} -modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, **t. 29**, p.185–272, 1996.
- [4] P. Berthelot. \mathcal{D} -modules arithmétiques II descente par Frobenius. *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire **81**, p. 1–135, 2000.
- [5] D. Caro. Fonctions L associées aux \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes I, 2002.
- [6] W. Fulton. A note on weakly complete algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**, p. 591–593, 1969.
- [7] C. Huyghe. Interprétation géométrique sur l'espace projectif des $A_N(K)^\dagger$ -modules cohérents. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 321**, Série I, p. 587–590, 1995.

- [8] C. Huyghe. Transformation de Fourier des $\mathcal{D}_{X, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **321**, Série I, p. 759–762, 1995.
- [9] C. Huyghe. \mathcal{D}^{\dagger} -affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot. *Compositio Mathematica*, **108**, No. 3, p. 277–318, 1997.
- [10] C. Huyghe. $\mathcal{D}^{\dagger}(\infty)$ -affinité des schémas projectifs. *Ann. Inst. Fourier*, **48**, No. 4, p. 913–956, 1998.
- [11] C. Huyghe. Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narvaez-Macarro. *Journal of Algebraic Geometry*, **12**, No. 1, p. 147–199, 2003.
- [12] J.C. McConnell and J.C Robson. Noncommutative Noetherian rings. *Wiley Interscience Publication*, 1987.
- [13] L. Narvaez-Macarro. Division theorem over the Dwork-Monsky-Washnitzer completion of polynomial rings and Weyl algebras. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **197**, p. 175–191, 1998.
- [14] A. Virrion. Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, t. **321**, p. 101–168, 2000.
- [15] A. Virrion. Trace et dualité relative pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques, IIème partie : Théorème de dualité relative et formule d'adjonction. *Prépublication de l'IRMAR*, **00-40**, p. 1–24, 2000.

Christine Noot-Huyghe

Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA)

Université Louis Pasteur

7 rue René Descartes

67084 Strasbourg Cedex France

mél huyghe@math-u.strasbg.fr, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe>