Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I

C. Noot-Huyghe *

Table des matières

Introduction

L'objet de cet article est de donner une construction de la transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques dans le cas d'un fibré vectoriel et pour les opérateurs différentiels relatifs.

Rappelons d'abord le cadre complexe de la transformation de Fourier. Introduisons l'algèbre de Weyl complexe

$$A_N(\mathbf{C}) = \{\sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\underline{k}} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathbf{C} \text{ et } a_{\underline{l},\underline{k}} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de multi} - \text{indices}\}.$$

Cette algèbre est munie d'un automorphisme donné par $F(x_i) = -\partial_i$ et $F(\partial_i) = x_i$. On en déduit un foncteur "Fourier formel" défini pour les $A_N(\mathbf{C})$-modules. C'est

[1]This work has been supported by the research network Arithmetic Algebraic Geometry of the European Community (Programme IHP, contract HPRN-CT-2000-00120)

un résultat important de la théorie des $\mathcal{D}$-modules complexes que cette transformation de Fourier formelle correspond à une transformation de Fourier géométrique définie sur les $\mathcal{D}$-modules associés aux $A_N(\mathbf{C})$-modules. En termes d'équation différentielle, cette opération est l'opération classique de transformation de Fourier.

Le cadre correspondant p-adique est le suivant. Soit V un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0,p)$, K son corps de fractions, k son corps résiduel. On suppose que K contient une racine, notée π (le "π" de Dwork), de l'équation $X^{p-1}=-p$. On peut considérer la complétée faible de l'algèbre de Weyl à coefficients dans K

$$A_N(K)^\dagger = \{\sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^l \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \text{ et } \exists C>0, \eta<1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}\},$$

où l'on note $\underline{\partial}^{[k_i]} = \partial_i^{k_i}/k_i!$. Cette algèbre est munie d'un automorphisme F_π défini par $F(x_i) = -\partial_i/\pi$ et $F(\partial_i) = \pi x_i$, ce qui permet de définir un foncteur sur la catégorie des $A_N(K)^\dagger$-modules cohérents. Il faut choisir une catégorie de $\mathcal{D}$-modules p-adiques correspondant aux $A_N(K)^\dagger$-modules cohérents. Nous traitons ici des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot, sur l'espace projectif de dimension N et à coefficients surconvergents le long du diviseur à l'infini. Pour cet article, les calculs et les résultats auraient sans doute été les mêmes avec la catégories des $\mathcal{D}$-modules p-adiques introduits par Mebkhout-Narvaez-Maccarro ([MNM90]). Le point de vue de Berthelot se justifie ici par l'existence, dans le cadre de sa théorie, d'un théorème de commutation de la dualité à l'image directe, essentiel pour montrer un théorème de comparaison entre la transformation de Fourier sans support et avec support (pour lequel on renvoie à l'article en préparation [NH03]). En outre, l'une des principales applications de la tranformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques se situe dans le cadre de la théorie de Berthelot. Nous donnons ensuite une définition de la tranformation de Fourier géométrique dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques et montrons un théorème de comparaison avec la tranformation de Fourier formelle, ce qui permet de donner quelques premières propriétés de la transformation de Fourier géométrique. Dans [Huy95a] (non publié), on donne la transformation de Fourier dans ce cadre. Nous généralisons ici cette construction et les résultats obtenus.

Soient $R = \mathrm{Spf}V$, S un R-schéma formel irréductible de dimension cohomologique finie sur S (par exemple lisse), X un S-schéma formel lisse et irréductible. Soit E un fibré vectoriel sur X de rang N. Le X-schéma formel affine $T = \mathbf{V}(E)$ admet une compactification projective naturelle en un schéma formel Y décrite pour les schémas dans le chapitre 8 de [EGA2]. On notera q le morphisme structural de Y vers S. Le complémentaire de T dans Y est un diviseur ∞. On considère sur Y le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à coefficients surconvergents le long de ∞, construit par P. Berthelot dans [Ber96b], et noté $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

Dans la première partie de cet article, on fait quelques rappels sur la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques à coefficients surconvergents le long d'un diviseur.

Dans la deuxième partie on décrit l'équivalence de catégories donnée par le foncteur q_* entre la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ et celle des $q_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. On démontre cette équivalence de catégories en donnant une filtration ad hoc du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, par des faisceaux d'algèbres acycliques pour q_*. Dans le cas où le fibré vectoriel E est trivial et où $S = \mathrm{Spf}V$, cela donne une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents sur Y qui est ici l'espace projectif formel de dimension N sur $\mathrm{Spf}V$ (vu comme compactification de l'espace affine formel de dimension N) et les $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents. Cette équivalence de catégories est au coeur du théorème de comparaison entre la transformation de Fourier géométrique et la transformation de Fourier formelle.

La troisième partie de cet article est consacrée à la construction de la transformation de Fourier. Dans le cas complexe, le noyau de la transformation de Fourier est fourni par l'image inverse par l'accouplement de dualité du module exponentiel sur la droite affine. L'analogue de ce module sera le F-isocristal de Dwork L_π sur la droite projective formelle, vue comme compactification de la droite affine formelle. On décrit ici complètement l'image inverse, au sens des isocristaux, du F-isocristal de Dwork, sur un ouvert de trivialisation du fibré vectoriel E par l'accouplement de dualité. C'est cette image inverse qui est le noyau de la transformation de Fourier. Ce point de vue évite d'avoir des problèmes liés aux compactifications.

Nous montrons ensuite dans la cinquième partie de cet article le théorème de comparaison entre la transformation de Fourier géométrique et la transformation de Fourier formelle. Le calcul de la transformation de Fourier du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est crucial et fait l'objet de la quatrième partie de cet article. C'est à ce niveau que se situe la principale difficulté. Sur $\mathbf{C}$, on peut facilement se ramener pour le calcul au cas de la dimension 1. Cela n'est pas possible ici et il faut en passer par un théorème de division pour terminer le calcul.

Ce théorème de comparaison permet de montrer deux résultats importants, d'abord la préservation de la cohérence par la transformation de Fourier géométrique et ensuite la préservation de l'holonomie pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules holonomes par transformation de Fourier. Ce dernier résultat est formel à partir de la caractérisation de l'holonomie obtenue par A. Virrion ([Vir00]). Nous terminons par quelques exemples de calcul de transformés de Fourier de F-isocristaux classiques.

Citons enfin la principale application de ce travail due à Baldassarri-Berthelot ([BB03]) où l'on utilise la transformation de Fourier pour comparer certains groupes de cohomologie rigide à support avec des groupes de cohomologie analytique de Dwork.

C'est Berthelot qui a eu l'idée de quelle devait être la construction de la transformation de Fourier géométrique dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Je le remercie aussi pour son insistance pour que je rédige ce travail. Je remercie aussi le referee pour son patient travail de lecture : ce texte y a indéniablement gagné en lisibilité et en clarté.

1. Notations et Rappels

On notera ξ une uniformisante de K. Pour tous les schémas formels sur R qui seront notés avec une lettre droite, on notera avec la même lettre indicée par 0, la fibre spéciale sur $\operatorname{spec} \mathrm{k}$ (par exemple X_0 sera la fibre spéciale du schéma X). Plus généralement, on note

$$X_i = X \times_{\mathrm{Spf} V} \operatorname{spec}(V/\xi^{i+1}V).$$

La notation X_K ou X_K^{an} désignera la fibre générique au sens de la géométrie rigide de X. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique, $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ est le faisceau $\mathcal{E} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Dans tout l'article, on supposera que X est un schéma formel lisse sur S, de dimension relative r, E un fibré vectoriel de rang N sur X, $T = \mathbf{V}(E)$ le schéma formel associé, Y la compactification donnée dans 8 de [EGA2] de ce schéma formel.

Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'algèbres sur un espace topologique T, nous noterons $D^b_{coh}(\mathcal{A})$ avec la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules (à gauche) à cohomologie bornée (resp. $D^-_{coh}(\mathcal{A})$, resp. à cohomologie nulle en degré positif), $D^b_{coh,d}(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à droite à cohomologie bornée.

Pour la transformation de Fourier, on suit les conventions de décalage de la fin de [KL85].

1.1. Faisceaux d'opérateurs différentiels arithmétiques.

Nous renvoyons à [Ber96b] pour un exposé systématique de la théorie. Faisons ici seulement quelques rappels.

Commençons par introduire quelques coefficients. Si k est un entier, $\mathrm{v}_p(k)$ désigne la valuation p-adique de k et on note q_k le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Si $\underline{k}$ est un r-uplet d'entiers, on notera $q_{\underline{k}} = q_{k_1} \cdots q_{k_r}$. Si il y a lieu de spécifier l'entier m, on notera ces coefficients $q_{\underline{k}}^{(m)}$ et $q_k^{(m)}$ respectivement.

Il est facile de montrer les encadrements suivants, pour tout r-uplet $\underline{k}$ d'entiers naturels

$$\frac{|\underline{k}|}{p-1} - r log_p(|\underline{k}|+1) - r \leq \mathrm{v}_p(\underline{k}!) \leq \frac{|\underline{k}|}{p-1},$$

$$\frac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)} - r log_p(|\underline{k}|+1) - \frac{rp}{p-1} \leq \mathrm{v}_p(q_{\underline{k}}^{(m)}!) \leq \frac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)}.$$

Soit $w_1, \ldots, w_r$ un système de coordonnées locales relatives de X par rapport à S sur un ouvert W de X. Berthelot construit un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres, qui est un faisceau d'opérateurs différentiels, noté $\mathcal{D}_X^{(m)}$ et décrit en coordonnées locales par

$$\mathcal{D}_X^{(m)} = \bigoplus_{\underline{k}\in\mathbf{N}^r} \mathcal{O}_X \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}},$$

où l'on a noté

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} = \frac{q_{\underline{k}}!}{\underline{k}!}\underline{\partial}^{\underline{k}}.$$

On note ensuite $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S}$ la complétion p-adique de ce faisceau et

$$\mathcal{D}^\dagger_{X/S,\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S,\mathbf{Q}}.$$

Tous ces faisceaux sont cohérents. Sur un ouvert W muni de coordonnées locales relatives comme précédemment, on observe (2.4.4 de [Ber96b])

$$\Gamma(W, \mathcal{D}^\dagger_{X/S,\mathbf{Q}}) = \left\{ \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^r} a_{\underline{k}}\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{k}} \in \Gamma(W, \mathcal{O}_{X,\mathbf{Q}}) \text{ et } \exists C > 0, \eta < 1 \mid |a_{\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{k}|} \right\},$$

où la norme considérée est n'importe quelle norme d'algèbre de Banach sur l'algèbre de Tate $\Gamma(W, \mathcal{O}_{X,\mathbf{Q}})$. Comme on le voit, cette formule est dissymétrique en les variables et en les dérivations. Par conséquent, il n'existe pas de transformation de Fourier formelle naturelle en considérant ce faisceau. C'est pourquoi, Berthelot introduit aussi dans [Ber96b], le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients surconvergents le long d'un diviseur.

1.2. Coefficients surconvergents sur un schéma formel.

Ces coefficients sont introduits par Berthelot dans [Ber96b] et sont définis comme suit. Soit $Z \subset X$ un diviseur de Cartier relatif d'un schéma formel X (i.e. Z_0 est un diviseur de Cartier de X_0), dont l'ouvert complémentaire est noté U. On note j l'inclusion de U dans X. Sur un ouvert W de X, sur lequel le diviseur Z est défini par l'équation $f = 0$, on pose

$$\mathcal{B}_X^{(m)} = \mathcal{O}_X[T] \Big/ f^{p^{m+1}}T - p$$

On vérifie que ces algèbres sont munies d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X/S}$-module.

Remarques. Ces algèbres sont des modèles sur le schéma formel X, d'algèbres des sections sur des voisinages stricts du tube de U_0 dans la fibre générique (au sens de Raynaud) X_K de X. Le principe du maximum en géométrie rigide permet alors de montrer le lemme suivant, dont la démonstration détaillée est donnée en 7.2.2 de [Huy98].

Lemme 1.2.1. *Soit u une section locale de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_X$, inversible sur U, alors il existe $m' \geq m$ tel que $pu^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_X$.*

Si W est un ouvert affine de X, les algèbres $\Gamma(W, \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{X,\mathbf{Q}})$ sont des algèbres de Tate, sur lesquelles toutes les normes d'algèbres de Banach sont équivalentes (à la norme spectrale par exemple).

Pour décrire plus précisément les faisceaux $\mathcal{B}^{(m)}_X$, nous aurons besoin de l'application $\nu_m : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ définie comme suit. Soit $k \in \mathbf{N}$, q et t le quotient et le reste respectivement de la division euclidienne de k par p^{m+1}. Si $t = 0$, on pose $\nu_m(k) = q$. Si $t \neq 0$, on pose $\nu_m(k) = q + 1$. On pose $\nu_m(k) = 0$ si $k \leq 0$. Pour un multi-indice $\underline{k}$ de $\mathbf{Z}^n$, on pose $\nu_m(\underline{k}) = \sum_{i=1}^n \nu_m(k_i)$. Soit f une équation locale du diviseur Z, une condition suffisante pour qu'une section locale de $j_*\mathcal{O}_X$, a/f^n, soit dans $\mathcal{B}^{(m)}_X$ est que $a \in p^{\nu_m(n)}\mathcal{O}_X$. Donnons des encadrements de la fonction ν_m. Pour tout multi-indice $\underline{l} \in \mathbf{N}^n$, on a les inégalités suivantes

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(\underline{l}) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + n,$$

$$0 \leq \nu_m(\underline{l}) - \nu_m(|\underline{l}|) \leq n.$$

Berthelot introduit enfin

$$\mathcal{O}^\dagger_X = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_X.$$

On renvoie à 4 [Ber96b] pour le lien entre les $\mathcal{O}^\dagger_{X,\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les isocristaux sur X_K surconvergents le long de Z. Si W est un ouvert affine de X, l'algèbre $\Gamma(W, \mathcal{O}^\dagger_{X,\mathbf{Q}})$ n'est pas une algèbre de Tate. On considérera sur cette algèbre la norme définie par la topologie p-adique sur $\Gamma(W, \mathcal{O}^\dagger_X)$, qui est une algèbre séparée, i.e.

$$|h|_p = p^{\min\{i \in \mathbf{Z} \mid \text{ tel que } p^i h \in \Gamma(W, \mathcal{O}^\dagger_X)\}}.$$

1.3. Opérateurs différentiels à coefficients surconvergents.

Avec les hypothèses du début de 1, et de 1.2 on pose

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X/S}(Z) = \mathcal{B}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X/S},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S}(Z) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_X \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S},$$

et

$$\mathcal{D}^\dagger_{X/S}({}^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S}(Z).$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguité, on notera ce faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{X/S}(\infty)$. C'est un faisceau d'algèbres cohérent. On trouve le même faisceau si on le construit à partir du diviseur nZ où $n \in \mathbf{N}$. Un résultat important est que le faisceau $j_*\mathcal{D}^\dagger_{U/S,\mathbf{Q}}$ est fidèlement plat à gauche et à droite sur le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{X/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ (4.3.10 de [Ber96b]).

Nous serons amenés à regarder la transformation de Fourier de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules holonomes. Rappelons-en la définition (cf 4.5 de [Ber00]). On suppose ici que le corps k est parfait et on se donne un relèvement $\sigma : R \to R$ du Frobenius absolu sur k. On suppose de plus que $S = R$ et on considère un S-schéma formel lisse X, $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$ le faisceau des opérateurs différentiels de Berthelot sur ce schéma et X' le schéma formel déduit de X par changement de base par σ.

Si on se donne un relèvement local F^* du Frobenius, cela induit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{X'/S,\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-modules cohérents. Cette équivalence de catégorie ne dépend pas du choix du relèvement du Frobenius. On peut donc définir une équivalence de catégories notée F^* entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{X'/S,\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-modules cohérents, contruite à partir des relèvements locaux du Frobenius. Si M est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-module cohérent, on note par abus de notation F^*M le $\mathcal{D}^{\dagger}_{X'/S,\mathbf{Q}}$-module cohérent obtenu par l'équivalence de catégories précédente (i.e. en fait F^*M^{σ}, où M^{σ} est le module sur X' obtenu par changement de base de M par σ). Avec ces hypothèses, un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-module est la donnée d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-module M et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-linéaire $\varphi : M \simeq F^*M$.

Les images directes par spécialisation de F-isocristaux surconvergents fournissent des exemples de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}$-modules.

1.4. Images directes et inverses des $\mathcal{D}$-modules à coefficients surconvergents le long d'un diviseur.

On donne ici les définitions et quelques propriétés, que nous ne montrerons pas et pour lesquelles on se reportera à [Ber03]. Dans cet article, ces propriétés ne seront pas utilisées.

On considère deux schémas formels lisses X et Y sur S, $d = dimX - dimY$ munis de diviseurs de Cartier relatifs $Z \subset X$ et $T \subset Y$. Lorsque le contexte sera clair, nous noterons ∞ à la place du diviseur Z ou T. Soit f un morphisme $X \to Y$. Supposons que f induit un homomorphisme de faisceaux d'algèbres $f^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_Y \to \mathcal{B}^{(m)}_X$ prolongeant l'homomorphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. On considère f_i la réduction de f modulo ξ^{i+1}. On introduit alors

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \to Y_i/S}(\infty) = \mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{Y_i}} f_i^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}} f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{Y_i/S},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X \to Y/S}(\infty) = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i \to Y_i/S}(\infty),$$

qui est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S}(Z)$-module à gauche et un $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y/S}(T)$-module à droite. On pose enfin

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{X \to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X \to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty),$$

qui est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module à gauche et un $f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T)$-module à droite.

Soit M un $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T)$-module à gauche cohérent (resp. un élément de $D^{-}_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T))$) on pose alors

$$f^{!}M = \mathcal{D}^{\dagger}_{X\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes^{L}_{f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T)} f^{-1}M[d].$$

Si f est lisse, $f^{!}M$ est alors un élément de $D^{-}_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z))$.

Avec les hypothèses ci-dessus, on pose

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y\leftarrow X/S,\mathbf{Q}}(\infty) = f^{*}\omega_{Y}^{-1} \otimes_{f^{*}\mathcal{O}_{Y}} \mathcal{D}^{\dagger}_{X\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \omega_{X},$$

qui est un $f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T)$-module à gauche et un $\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module à droite. Si M est dans $D^{b}_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z))$-module à gauche, on pose

$$f_{+}(M) = Rf_{*}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y\leftarrow X/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes^{L}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{X/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)} M).$$

Dans le cas où le faisceau $f^{*}\mathcal{B}^{(m)}_{Y}$ est isomorphe à $\mathcal{B}^{(m)}_{X}$, la même démonstration que dans le cas classique (sans pôles surconvergents) donne que que $f_{+}M$ est dans $D^{b}_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T))$.

2. Une équivalence de catégories fondamentale

2.1. Quelques propriétés de certains faisceaux différentiels sur Y.

On rappelle (8 de [EGA2]) que

$$Y = \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_{X}}(E) \bigoplus \mathcal{O}_{X}z).$$

L'espace dual $Y^{\vee}$ est donné par l'objet analogue où l'on remplace E par $E^{\vee}$ et l'indéterminée z par z'. On considérera

$$Z = Y \times_{X} Y^{\vee}.$$

Cela donne le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y \arrow[dr, "q_1"'] & & Y^{\vee} \arrow[dl, "q_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

On introduit sur Y et $Y^\vee$ les diviseurs à l'infini $z = 0$ et $z' = 0$, notés ∞_Y et $\infty_{Y^\vee}$ (ou ∞ pour alléger les notations) et sur Z le diviseur $Y \times \infty_{Y^\vee} \bigcup \infty_Y \times Y^\vee$ noté ∞_Z (ou ∞). On note T et $T^\vee$ resp. le complémentaire du diviseur ∞_Y dans Y (resp. dans $Y^\vee$). On introduit les coefficients surconvergents sur Y, $Y^\vee$ et Z relativement à ces diviseurs, notés respectivement $\mathcal{O}^\dagger_{Y,\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{O}^\dagger_{Y^\vee,\mathbf{Q}}$. On décrit ici certains faisceaux différentiels qui interviennent sur Y (resp. $Y^\vee$) et Z. Pour alléger les notations, les résultats seront donnés pour Y et on notera alors $q = q_1$, q' la projection $T \to X$ et j l'immersion ouverte de T dans Y.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules (resp. $Y^\vee$, resp. Z), on note

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}^\dagger_{Y,\mathbf{Q}}.$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}}_{Y/X,\mathbf{Q}} &\simeq \widetilde{q^*E^\vee} \\ \widetilde{q^*E} &\simeq \widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}} \\ \widetilde{q^*\Lambda^N E} &\simeq \widetilde{\omega}_{Y/X,\mathbf{Q}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la deuxième assertion. Observons d'abord qu'il existe une flèche $q^{-1}E \to \widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}}$. Pour cela il suffit de définir une flèche $E \to q_*\widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}}$. Il est bien connu que le faisceau ${q'}^*E$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^1_{T/X}$ via une application τ définie comme suit. Soit W, un ouvert de X tel que $E_{|W}$ est trivial, $E_{|W} \simeq \mathcal{O}_X x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathcal{O}_X x_N$, alors $\tau(x_i) = dx_i$. On en déduit un homomorphisme canonique $E \to q'_*\Omega^1_{T/X}$.

D'autre part, il existe une injection $q_*\widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}} \to q'_*\Omega^1_{T/X}$ et nous allons montrer que l'application précédente est en fait à valeurs dans $q_*\widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}}$, ce qui est une question locale sur X. Plaçons-nous sur un ouvert W sur lequel E est trivial, isomorphe à $\mathcal{O}_W x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathcal{O}_W x_N$. Dans ce cas, le choix des x_l induit des isomorphismes $T_{|W} \simeq \widehat{\mathbf{A}}^N_X$ et $Y_{|W} \simeq \widehat{\mathbf{P}}^N_X$, muni de coordonnées homogènes $(u_0, \ldots, u_N)$ tels que $x_l = u_l/u_0$. Pour montrer l'assertion, il suffit de montrer que les éléments dx_l sont des sections globales sur W de $\widetilde{\Omega}^1_{Y/X,\mathbf{Q}}$. Si on note $y_l = u_l/u_i$, des coordonnées sur l'ouvert $D_+(u_i)$ de Y, $Y_W = Y_{|W}$, on a la relation suivante

$$dx_l = \frac{dy_l}{y_0} - \frac{y_l}{y_0^2}dy_0.$$

Comme $y_0^{-1} = u_i/u_0$ est un élément de $\Gamma(Y_W, \mathcal{O}^\dagger_{Y,\mathbf{Q}}(\infty))$, l'élément dx_l est dans $\Gamma(D_+(u_i), \widetilde{\Omega}^1_{Y_W/W,\mathbf{Q}})$, ce qui montre la proposition.

2.2. Énoncé du théorème.

On commence par un résultat donnant la structure des $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents, généralisant le théorème principal de [Huy95c]. L'énoncé est le suivant.

Théorème 2.2.1. *i Le faisceau $q_*\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est un faisceau cohérent de $q_*\mathcal{O}^{\dagger}_{Y,\mathbf{Q}}$-algèbres.*

ii Le foncteur q_* est exact sur la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et définit une équivalence de catégories de la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents vers la catégorie des $q_*\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. L'équivalence inverse est donnée par le foncteur

$$N \mapsto \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{q^{-1}q_*\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)} q^{-1}N.$$

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un recouvrement ouvert de X ($X = W_1 \bigcup \ldots \bigcup W_r$) tel que le théorème soit vrai, appliqué à la restriction de q_* au dessus de chaque $W_i : q^{-1}W_i \to W_i$.

On considère maintenant un recouvrement ouvert de X par des ouverts affines, lisses, $W_1, \ldots, W_r$, tels que le fibré E est trivial sur chaque W_i.

L'objet des sous-sections suivantes est de montrer que le théorème est vrai dans le cas où X est affine et lisse et où le fibré E est trivial, i.e. est un $\mathcal{O}_X$-module libre de base fixée $(x_1, \ldots, x_N)$. Ce choix de coordonnées permet d'identifier les schémas T et Y, respectivement à $\widehat{\mathbf{A}}^N_X$, muni des coordonnées relatives $(x_1, \ldots, x_N)$ et $\widehat{\mathbf{P}}^N_X$, muni des coordonnées homogènes relatives $(u_0, \ldots, u_N)$ tels que $x_l = u_l/u_0$. Avec ces notations, le diviseur à l'infini sur Y est donné par l'équation $u_0 = 0$. Les opérateurs différentiels sur T relatifs par rapport à X sont notés $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$.

2.3. Démonstration dans le cas particulier où le fibré est trivial.

Dans ce cas, on va exhiber une filtration du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ par des faisceaux d'algèbres complètes ayant de bonnes propriétés cohomologiques, que l'on notera $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}$. Cette filtration généralise la filtration introduite dans [Huy95c] dans le cas relatif.

Commençons par la remarque suivante

Remarque Soit m un entier. Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}^{(m)}_T \simeq \bigoplus_{\underline{k} \in \mathbf{N}^N} q'^*\mathcal{D}^{(m)}_X \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

En effet, on a l'égalité $\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_X[x_1, \ldots, x_N]$. De cette égalité, on déduit qu'il existe un scindage global naturel de la suite exacte courte

$$0 \to f^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{T/S} \to \Omega^1_{T/X} \to 0,$$

envoyant dx_i sur dx_i pour tout $1 \leq i \leq N$. Choisissons $(w_1, \ldots, w_r)$ un système de coordonnées locales sur un ouvert W de X, et notons $\partial_w^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} \in \mathcal{D}_{X/S}$ les opérateurs différentiels sur X correspondant à ce choix. Notons encore $\partial_{\overline{w}}^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} \in \mathcal{D}_{T/S}$ et $\partial^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \in \mathcal{D}_{T/X}$ les opérateurs différentiels correspondant au système de coordonnées locales $(w_1, \ldots, w_r, x_1, \ldots, x_N)$ sur T, par rapport respectivement aux variables $(w_1, \ldots, w_r)$ et $(x_1, \ldots, x_N)$.

Du scindage précédent, on déduit un scindage

$$\mathcal{T}_{T/S} \simeq \mathcal{T}_{T/X} \bigoplus q'^* \mathcal{T}_{X/S},$$

qui envoie $\partial_{\overline{w_i}}$ sur ∂_{w_i}. On étend l'inverse de cette flèche en une injection de faisceaux de $q^{-1}\mathcal{O}_X$-algèbres en envoyant $\partial_w^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}}$ sur $\partial_{\overline{w}}^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}}$ pour tout $\underline{k}'$. On vérifie facilement que cette flèche ne dépend pas du choix des w_i et définit une injection, dépendant de la trivialisation de E,

$$q^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X/S} \to j_* \mathcal{D}^{(m)}_{T/S}.$$

On remarque aussi (en faisant des calculs en coordonnées locales) que cette injection est en fait à valeurs dans $\mathcal{D}^{(m)}_{Y/S}$ et permet de considérer $q^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X/S}$ comme un sous-faisceau de $D^{(m)}_{Y/S}$.

Le lemme qui suit sera utilisé pour construire un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{Y/S}(\infty)$.

Lemme 2.3.1. *Les opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sont des éléments de $\Gamma(Y, \mathcal{D}^{(m)}_{Y/X})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ sont des sections globales du faisceau $\mathcal{D}_{Y/S}$ sur Y. Commençons par remarquer que les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ agissent sur $\mathcal{O}_Y$. Considérons l'ouvert $U_i = D_+(u_i)$, muni des coordonnées $y_l = u_l/u_i$. Notons

$$\underline{y}^{\underline{l}} = y_0^{l_0} \cdots y_{i-1}^{l_{i-1}} y_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots y_N^{l_N},$$

et pour un multi-indice $\underline{l} = (l_0, \cdots, l_{i-1}, l_{i+1}, \cdots, l_N)$, $|\underline{l}| = l_0 + \cdots + l_{i-1} + l_{i+1} + \cdots + l_N$. Sur $U_i \bigcap U_0$, on a l'égalité

$$\underline{y}^{\underline{l}} = x_1^{l_1} \ldots x_{i-1}^{l_{i-1}} x_i^{-|\underline{l}|} x_{i+1}^{l_{i+1}} \ldots x_N^{l_N}.$$

On en déduit les formules suivantes qui montrent la remarque.

$$\begin{aligned}
\text{si} \quad r = i, \quad \partial_i^{[k_i]} \underline{y}^{\underline{l}} &= (-1)^{k_i} \binom{|\underline{l}| + k_i - 1}{|\underline{l}| - 1} y_0^{l_0 + k_i} y_1^{l_1} \ldots y_N^{l_N}, \\
\text{si} \quad r \neq i, \quad \partial_r^{[k_r]} \underline{y}^{\underline{l}} &= \binom{l_r}{k_r} y_0^{l_0 + k_r} y_1^{l_1} \ldots y_r^{l_r - k_r} \ldots y_N^{l_N}.
\end{aligned}$$

Notons $\underline{\partial}_y^{\underline{l}}$ les opérateurs sur U_i/X et q' la projection $U_i \to X$. Sur $U_i \bigcap U_0$, il existe des éléments $b_{\underline{l}} \in \Gamma(U_i \bigcap U_0, \mathcal{O}_Y)$ tels que

$$\partial_r^{[k_r]} = \sum_{|\underline{l}| \leq k_r} b_{\underline{l}} \underline{\partial}_y^{[\underline{l}]}.$$

Considérons $I = \left\{ \underline{l} \mid \exists c_{\underline{l}} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) \text{ tel que } b_{\underline{l}} = c_{\underline{l}|U_i \bigcap U_0} \right\}$ et J l'ensemble complémentaire. Posons

$$P = \partial_r^{[k_r]} - \sum_{\underline{l} \in I} b_{\underline{l}} \underline{\partial}_y^{[\underline{l}]} = \sum_{\underline{l} \in J} b_{\underline{l}} \underline{\partial}_y^{[\underline{l}]}.$$

Cet opérateur a la propriété d'opérer sur les sections de $\mathcal{O}_Y(U_i)$. Si J est non vide, on peut prendre $\underline{l}' \in J$, tel que $|\underline{l}'|$ soit minimal dans J. Alors, si $\underline{l} \in J$ tel que $\underline{l} \neq \underline{l}'$, il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $l_s > l'_s$. Donc, si $\underline{l} \in J$ et si $\underline{l} \neq \underline{l}'$, on a l'égalité $\underline{\partial}_y^{[\underline{l}]} \cdot \underline{y}^{\underline{l}'} = 0$. Et finalement, on a la formule :

$$\begin{aligned} P \cdot \underline{y}^{\underline{l}'} &= b_{\underline{l}'} \underline{\partial}_y^{\underline{l}'} (\underline{y}^{\underline{l}'}) \in \mathcal{O}_Y(U_i) \\ &= b_{\underline{l}'} \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que l'ensemble J soit non vide et montre le lemme. Le lemme suivant permettra de préciser la structure du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S}(\infty)$.

Posons

$$\mathcal{A}_{Y/S}^{(m)} = \bigoplus_{\underline{k}} \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)} \otimes_{q^{-1}\mathcal{O}_X} q^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

La proposition est la suivante

Proposition 2.3.2. *Le faisceau $\mathcal{A}_{Y/S}^{(m)}$ est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)}$-algèbres du faisceau $\mathcal{D}_{Y/S}^{(m)}(\infty)$.*

Ce faisceau est naturellement un sous-faisceau de $\mathcal{D}_{T/S}^{(m)}$, et en fait de $\mathcal{D}_{Y/S}^{(m)}(\infty)$. Pour voir que c'est un faisceau d'algèbres, il faut vérifier que pour tout multi-indice $\underline{k}$, tout $(P, b, P') \in \mathcal{D}_X^{(m)} \times \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)} \times \mathcal{D}_X^{(m)}$, le produit $P\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} bP'$ est un élément de $\mathcal{A}_{Y/S}^{(m)}$. Il résulte du lemme que pour tout multi-indice $\underline{l}$, $\underline{\partial}^{\langle \underline{l} \rangle_{(m)}}(b) \in \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)}$. Les éléments de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ commutent avec les opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{l} \rangle_{(m)}}$. D'autre part, du fait que $q^{-1}\mathcal{D}_{X/S}^{(m)}$ opère sur $\widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)}$, on a

$$q^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)} \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)} \subset \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)} q^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}.$$

Ces remarques permettent finalement d'établir le fait suivant

$$P\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} bP' \in \sum_{\underline{l}' \leq \underline{k}} \widehat{\mathcal{B}}_Y^{(m)} q^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)} \underline{\partial}^{\langle \underline{l}' \rangle_{(m)}}(b) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{l}' \rangle_{(m)}},$$

qui montre la proposition.

Posons $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}$ le complété p-adique du faisceau $\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$ et

$$\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S} \otimes \mathbf{Q}.$$

2.3.3. Résultats concernant les faisceaux d'algèbres $\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}$

Structure de l'algèbre graduée des algèbres $\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$. Remarquons tout de suite que ces faisceaux sont des faisceaux d'algèbres cohérents. En effet, les algèbres non complétées $\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$ sont filtrées par l'ordre des opérateurs différentiels. En utilisant 1.3.7.3 de [Huy97], on voit que le gradué associé à cette filtration est isomorphe sur Y à l'algèbre symétrique de niveau m à coefficients dans $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_Y$

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_Y \otimes_{q^{-1}\mathcal{O}_X} q^{-1}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}^N_Y).$$

Cette algèbre est noethérienne sur les ouverts affines de Y, il en est donc de même des sections sur les ouverts affines des faisceaux $\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$ et des sections des faisceaux complets $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}$ sur les ouverts affines. On observe aussi que si V est un ouvert d'un ouvert U, complémentaire d'un diviseur défini par une équation $h = 0$, alors $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}(V)$ est un module plat à gauche (et à droite) sur $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}(U)$. La proposition 3.3.4 de [Ber96b] permet de conclure que le faisceau $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S}$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{B}^{(m)}_Y$-algèbres.

Calculs de sections globales. Calculons les sections globales de ces faisceaux sur $q^{-1}(W)$ où W est un ouvert de X muni de coordonnées locales $w_1, \ldots, w_r$. Notons encore $\underline{\partial}_w$ les opérateurs différentiels relatifs aux coordonnées $w_1, \ldots, w_r$. Dans notre cas, $q^{-1}W$ s'identifie à $\widehat{\mathbf{P}}^N_W$, de sorte que le même calcul qu'en 2.1 de [Huy95c], donne le résultat suivant

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_Y(q^{-1}(W)) = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N}^N} a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} \mid a_{\underline{l}} \in \mathcal{O}_X(W) \text{ et } \mathrm{v}_p(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(\underline{l}) \text{ et } \mathrm{v}_p(a_{\underline{l}}) - \nu_m(\underline{l}) \to \infty \text{ si } |\underline{l}| \to +\infty \right\}.$$

On en déduit les deux égalités suivantes. Dans ces égalités, les multi-indices parcourent les ensembles $\underline{l} \in \mathbf{N}^N$, $\underline{k}' \in \mathbf{N}^r$, $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$.

$$\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}(q^{-1}(W)) = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}_w^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} \mid a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(W) \text{ et } \right.$$
$$\left. \mathrm{v}_p(a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}) \geq \nu_m(\underline{l}) \text{ et } \mathrm{v}_p(a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}) - \nu_m(\underline{l}) \to \infty \text{ si } |\underline{l}| + |\underline{k}| + |\underline{k}'| \to +\infty \right\},$$

d'où, en passant à la limite inductive,

$$\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S}(q^{-1}(W)) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{[\underline{k}']} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(W) \text{ et} \\ \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}'|+|\underline{k}|} \end{array} \right\},$$

où $|.|$ est n'importe quelle norme sur $\mathcal{O}_X(W)$ induite par une norme de Banach sur $\mathcal{O}_X(W) \otimes \mathbf{Q}$, qui est une algèbre de Tate.

Résultats d'acyclicité. On va montrer le théorème 2.2.1 pour les faisceaux $\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}$. On montre d'abord cet énoncé pour les faisceaux cohérents $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}}$. Pour ces faisceaux, on procède comme en 4 de [Huy95b].

Plaçons-nous au-dessus d'un ouvert W de X, muni de coordonnées locales et posons $q^{-1}(W) = Y_W$. Alors, étant donné la formule donnée en 2.3.3, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}^{\bullet}\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$ est un $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_Y$-module libre au-dessus de W. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}}$ ont alors les mêmes propriétés que les faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}}$ intervenant dans la partie 4 de [Huy95b]. La proposition 4.2.3 de cet article s'applique donc aux faisceaux $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}}$ au-dessus de l'ouvert W. Soit M un module de présentation finie sur l'algèbre $\Gamma(q^{-1}(W), \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}})$, notons φ le foncteur

$$N \mapsto \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}} \otimes_{\Gamma(q^{-1}(W),\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}})} N.$$

La traduction de l'énoncé 4.2.3 dans notre cas est l'énoncé suivant

i L'algèbre $\Gamma(q^{-1}(W), \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}})$ est cohérente,

ii les foncteurs φ et $\Gamma(q^{-1}(W), .)$ sont exacts et induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des $\Gamma(q^{-1}(W), \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}})$-modules cohérents et la catégorie des $\widehat{\mathcal{A}}^{(m)}_{Y/S,\mathbf{Q}}$-modules cohérents.

Le théorème découlera finalement du théorème de comparaison suivant.

Théorème 2.3.4. *i Il existe un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}^{\dagger}_Y$-algèbres canonique*

$$\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}} \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty).$$

ii Sur un ouvert $W' \subset Y_W$ où W est un ouvert de X muni de coordonnées locales $w_1, \ldots, w_r$ sur lequel E est trivial, de base $(x_1, \ldots, x_N)$, on a la description suivante

$$\Gamma(W', \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{[\underline{k}']} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \Gamma(W', \mathcal{O}_{Y,\mathbf{Q}}) \text{ et} \\ \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}'|+|\underline{k}|} \end{array} \right\}.$$

En particulier, si $S = X$ et si le fibré est trivial, on trouve que $\Gamma(\widehat{\mathbf{P}}^N_S, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/X,\mathbf{Q}}(\infty))$ s'identifie à l'algèbre de Weyl de dimension N, à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}_X$, tensorisée par K. Bien entendu, dans la description des sections globales, on peut inverser l'ordre des variables et des dérivations (car on peut le faire dans la description des faisceaux $\mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$).

Démonstration. Le (ii) découle bien sûr de l'assertion (i). D'autre part, on a une injection canonique $\mathcal{A}^{\dagger}_{Y/S} \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. Il reste donc à vérifier que cette flèche est surjective. La question est locale et on peut supposer que l'on est au-dessus d'un ouvert W affine de X. Soit $U_i = D_+(u_i) \subset Y$, muni des coordonnées $y_l = u_l/u_i$ et notons ∂_y les opérateurs de $\mathcal{D}^{(m)}_{Y/X}$ correspondant à ce choix de coordonnées. Considérons M et N les deux modules $\mathcal{O}_{U_i}$-modules libres suivants

$$N = \bigoplus_{|\underline{k}| \leq p^m} \mathcal{O}_{U_i} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}},$$

$$M = \bigoplus_{|\underline{k}| \leq p^m} \mathcal{O}_{U_i} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

Il existe une injection canonique de M dans N, représentée par une matrice $A \in M_{Np^m \times Np^m}(\mathcal{O}_X(U_i))$. D'autre part, en restriction à U_0 ces deux modules s'identifient $\mathcal{D}^{(m)}_{U_i/X,p^m}$, et sont donc isomorphes. On déduit du lemme 1.2.1 qu'il existe un entier m' tel que $pdet(A)^{-1} \in \mathcal{B}^{(m')}_{U_i}$. Sur U_i, cela donne le résultat suivant

$$\forall |\underline{k}| \leq p^m,\ p\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y \otimes \mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}.$$

On choisit un tel m' qui marche pour tous les ouverts U_i pour $0 \leq i \leq N$. On notera que le faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y$-algèbres $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y \otimes \mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}$ est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y$-algèbres de $\mathcal{A}^{(m')}_{Y/S}$, par la même justification qu'en 2.3.2. Comme les opérateurs $\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sont produit de au plus $[|\underline{k}|/p^m] + N$ opérateurs d'ordre $\leq p^m$ (où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x), on a l'inclusion suivante :

$$\forall |\underline{k}| \in \mathbf{N}^N,\ p^{\left[\frac{|\underline{k}|}{p^m}\right] + N} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y \otimes \mathcal{A}^{(m)}_{Y/S}.$$

Appliquons ce qui précède à $m+2$. Cela signifie qu'il existe un entier $m' \geq m+2$ tel que l'on ait l'inclusion :

$$\forall |\underline{k}| \in \mathbf{N}^N,\ p^{\left[\frac{|\underline{k}|}{p^{m+2}}\right] + N} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+2)}} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_Y \otimes \mathcal{A}^{(m+2)}_{Y/S}.$$

Rappelons maintenant la relation

$$\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+2)}} = \frac{q^{(m+2)}_{\underline{k}}!}{q^{(m)}_{\underline{k}}!} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

A partir des majorations données en 1.1, on calcule la majoration suivante :

$$\mathrm{v}_p \left(\frac{q^{(m+2)}_{\underline{k}}!}{q^{(m)}_{\underline{k}}!} p^{\left[\frac{|\underline{k}|}{p^{m+2}}\right] + N} \right) \leq -\frac{|\underline{k}|}{p^{m+1}} + N log_p(|\underline{k}| + 1) + \frac{N(2p-1)}{p-1},$$

quantité qui est majorée, pour tous $\underline{k}$ par une certaine constante $c \geq 0$. On en déduit que, sur tout ouvert U_i, pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, on a l'inclusion

$$p^c \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \subset \mathcal{A}_{Y/S}^{(m')},$$

d'où on déduit l'inclusion $p^c \mathcal{D}_{Y/S}^{(m)}(\infty) \subset \mathcal{A}_{Y/S}^{(m')}$. Il s'ensuit la même inclusion au niveau des complétés p-adiques. Si on passe à la limite inductive sur m et si on tensorise par $\mathbf{Q}$, on voit que l'on a ainsi construit une application $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) \to \mathcal{A}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}$ qui est l'inverse de l'application canonique de $\mathcal{A}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}$ dans $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$.

Terminons maintenant la démonstration du théorème 2.2.1. Plaçons-nous sur un ouvert W de X, muni de coordonnées locales. En fait l'assertion de la cohérence (i) provient de l'équivalence de catégories (ii) (pour les $\Gamma(q^{-1}(W), \mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty))$-modules de présentation finie) et de la cohérence de $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$. Cette équivalence de catégorie se montre comme dans 5.3.3 de [Huy95b] et repose sur la remarque facile suivante. Si $\mathcal{M}$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$-modules, il existe un entier m, un $\widehat{\mathcal{A}}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{(m)}$-module cohérent $\mathcal{M}_m$ tels que l'on ait un isomorphisme

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) \otimes_{\widehat{\mathcal{A}}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{(m)}} \mathcal{M}_m.$$

Le (ii) du théorème provient alors des propriétés d'acyclicité des $\widehat{\mathcal{A}}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{(m')}$ pour $m' \geq m$, au-dessus de $q^{-1}(W)$. Pour l'équivalence de catégories, on se ramène aussi facilement au cas du module $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$.

Enfin, nous aurons besoin du corollaire facile suivant, toujours au-dessus d'un ouvert W de X muni de coordonnées locales et sur lequel le fibré vectoriel E est trivial.

Corollaire 2.3.5. *Soit M un $\mathcal{D}_{Y_W/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$-module cohérent, alors il existe une résolution de M par des modules globalement projectifs de rang fini.*

Démonstration. Il résulte de l'équivalence de catégories donnée dans le théorème précédent et de la cohérence du faisceau $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ que l'algèbre $q_*\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ est cohérente. De plus, la même démonstration que celle de [Huy01] donnant la finitude de la dimension cohomologique de l'algèbre de Weyl $A_N(K)^{\dagger}$ donne la finitude de la dimension cohomologique de $q_*\mathcal{D}_{Y_W/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ sous nos hypothèses. Soit M comme dans l'énoncé du corollaire, alors q_*M est cohérent et admet une résolution par des $q_*\mathcal{D}_{Y_W/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$-modules à gauche cohérents globalement projectifs de rang fini. En prenant l'image par φ de cette résolution, on montre l'énoncé.

2.4. Complément au théorème.

On peut compléter l'énoncé du théorème 2.2.1 grâce à la finitude de la dimension cohomologique des faisceaux $\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ et $q_*\mathcal{D}_{Y/S,\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$. Une première remarque est que le théorème vaut aussi pour les modules à droite. On peut alors énoncer une compatibilité à la dualité de l'équivalence de catégories décrite en 2.2.1.

Proposition 2.4.1. *i Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche cohérent, alors il existe un isomorphisme canonique*

$$q_*\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M,\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq \mathcal{E}xt^i_{q_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(q_*M, q_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

ii Soit M dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, alors il existe un isomorphisme canonique dans $D^b_{coh,d}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$

$$q_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M,\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq R\mathcal{H}om_{q_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(q_*M, q_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Démonstration. Soit M un $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$-module cohérent. L'existence d'un homomorphisme

$$Rq_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M,\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \to R\mathcal{H}om^i_{Rq_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(Rq_*M, Rq_*\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)),$$

est classique. Comme les modules $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M,\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à droite cohérents, ils sont acycliques pour q_*. La suite spectrale des foncteurs dérivés associée aux foncteurs Rq_* et $R\mathcal{H}om$ dégénère en E_2 et finalement la suite spectrale des foncteurs composés $Rq_*R\mathcal{H}om$ dégénère en E_2. La question de l'isomorphisme est alors une question locale sur la base X et on peut supposer que l'on est au-dessus d'un ouvert W de X muni de coordonnées locales et sur lequel le fibré vectoriel E est trivial. Dans ce cas, le module M admet sur Y_W une résolution finie, par des modules globalement projectifs de rang fini. Cela nous ramène par récurence sur la longueur de la résolution projective à montrer l'assertion dans le cas où le module M est globalement projectif de rang fini, ce qui résulte du fait que c'est trivialement vrai dans le cas de $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

Le (ii) se déduit de (i) par dévissage.

3. Construction de la transformation de Fourier

3.1. Définitions.

3.1.1. Le noyau de la transformation de Fourier. Nous reprenons les notations de l'introduction. Le crochet de dualité $<,>: E\times E^\vee \to \mathcal{O}_X$ s'étend canoniquement en un morphisme $<,>: T\times T^\vee \to \widehat{\mathbf{A}}^1_X$ (et au niveau des fibres spéciales $T_0\times T_0^\vee$). Pour alléger les notations, l'accouplement de dualité $<,>$ sera aussi noté δ.

Soit $\widehat{\mathbf{P}}^1_X$ le droite projective de dimension 1 sur X, vue comme compactification de $\widehat{\mathbf{A}}^1_X$. Avec le choix de π qui a été fait, on peut introduire le F-isocristal de Dwork L_π sur la droite affine $\mathbf{A}^1_{X_0}$, dont une réalisation sur $\widehat{\mathbf{P}}^1_X$ est décrite de la façon suivante (cf 2.2.15 de [Ber96a], dont nous reprenons les notations). Le $j^\dagger\mathcal{O}_{]\mathbf{P}^1_{X_0}[}$-module sous-jacent à L_π est le faisceau structural $j^\dagger\mathcal{O}_{]\mathbf{P}^1_{X_0}[}$ et si t est la coordonnée sur $\mathbf{A}^1_{X_0}$, la connexion sur L_π est définie par $\nabla(1) = -\pi dt$. On note $\delta^* L_\pi$ l'image inverse sur $T_0 \times T_0^\vee$, comme F-isocristal surconvergent, de l'isocristal de Dwork L_π. On note encore $\delta^* L_\pi$ la réalisation cet F-isocristal sur l'espace rigide analytique $Y_K \times Y_K^\vee$ ainsi que l'image directe par spécialisation de cet isocristal sur $Y \times Y^\vee$, qui est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{Y\times Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent d'après 4.4.12 de [Ber96b]. Stricto sensu, la réalisation de $\delta^* L_\pi$ est définie à isomorphisme canonique près. On obtient ainsi un F- $\mathcal{D}^\dagger_{Y\times Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, qui est le noyau de la transformation de Fourier. Pour rester fidèle aux conventions de [KL85], on notera $K_\pi = \delta^* L_\pi[2-2N]$.

3.1.2. Description explicite du noyau de la transformation de Fourier dans le cas où E est trivial. Le calcul repose sur les arguments utilisés par Berthelot pour montrer que la catégorie des isocristaux surconvergents sur un schéma sur speck ne dépend pas du choix des compactifications.

Dans le cas où E est trivial, les schémas T, $T^\vee$, Y et $Y^\vee$ s'identifient respectivement à l'espace affine sur X de dimension N, l'espace affine dual sur X, l'espace projectif sur X et l'espace projectif dual sur X. On introduira $x_1, \ldots, x_N$, (resp. $y_1, \ldots, y_N$) des coordonnées sur l'espace affine T (resp. sur l'espace affine dual). On notera t une coordonnée sur la droite affine $\widehat{\mathbf{A}}^1_X$. On notera $u_0, \ldots, u_N$ et $v_0, \ldots, v_N$ des coordonnées sur les espaces projectifs Y et Y', telles que $x_i = u_i/u_0$ et $y_i = v_i/v_0$. On notera avec un symbole an en exposant les fibres génériques (i.e. les espaces analytiques rigides) associés aux espaces affines et aux espaces projectifs. L'accouplement de dualité δ est donné, avec ce choix de coordonnées par :

$$\begin{array}{ccc} T_0 \times T_0^\vee & \longrightarrow & \mathbf{A}^1_{X_0} \\ & & \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i & \longleftarrow\!\!\shortmid & t. \end{array}$$

Dans la suite, on notera $\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$. On considère le produit $P = Y \times Y^\vee \times \mathbf{P}^1_X$, P_K la fibre générique de ce schéma formel au sens de Raynaud, et l'immersion

$$\begin{array}{ccc} T \times T^\vee & \longrightarrow & Y \times Y^\vee \times \mathbf{P}^1_X \\ & & \\ (\underline{x},\underline{y}) & \longmapsto & \underline{x}\cdot\underline{y}. \end{array}$$

On introduira les coordonnées homogènes $[u, v]$ sur $\mathbf{P}^1_X$, telles que $t = v/u$. L'image schématique de cette immersion est un sous-schéma fermé G de P (via une immersion fermée i), telle que le morphisme structural soit propre. Ce sous-schéma est défini par l'équation $h' = 0$ avec

$$h' = u_0 v_0 v - u \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$$

et est lisse au voisinage de X_0. On notera G_K la fibre générique de G, qui est le sous-espace analytique rigide de P_K défini par l'équation $h' = 0$. Dans la suite, on introduira aussi $h = t - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$, qui définit $G \bigcap T \times T^\vee \times \mathbf{A}^1_X$. L'immersion de $T \times T^\vee$ dans G est ouverte, et, en notant r_2 la projection de P sur le dernier facteur et $s_2 = r_2 \circ i$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
T \times T^\vee & \hookrightarrow & G_0 & \hookrightarrow & G \\
\downarrow {\scriptstyle \delta} & & \downarrow {\scriptstyle s_2} & & \downarrow {\scriptstyle s_2} \\
\mathbf{A}^1_{X_0} & \overset{j_2}{\hookrightarrow} & \mathbf{P}^1_{X_0} & \hookrightarrow & \widehat{\mathbf{P}}^1_X .
\end{array}$$

Il résulte de la section 2.3.2.2 de [Ber96a], que l'on peut utiliser ce diagramme pour calculer une réalisation du F-isocristal $\delta^* L_\pi$, qui est donnée par $s_{2,K}^* L_\pi$ où $s_{2,K}$ est l'application induite par s_2 au niveau des espaces analytiques rigides, i.e. $s_{2,K} : G_K \to \mathbf{P}^{1,an}_{X_K}$.

Une base de voisinages stricts de $T_0 \times T_0^\vee$ dans G_K est donnée par les ouverts $V_\lambda = D(0,\lambda)^{2N+1} \bigcap G_K$, pour $\lambda > 1$ où $D(0,\lambda)^{2N+1}$ est le polydisque de dimension $2N+1$ de rayon λ dans l'espace analytique rigide P_K. Le système inductif de ces ouverts est équivalent au sous-système inductif des ouverts

$$V_n = D(0, p^{\frac{1}{2n}})^{2N+1} \bigcap G_K.$$

Il suffit donc finalement de calculer la restriction de $\delta^* L_\pi$ à ces ouverts. Pour n fixé, l'ouvert V_n est affinoide et correspond aux faisceaux d'algèbres de Tate

$$A_n = \mathcal{O}_{X_K}\{p\underline{x}, p\underline{x}^{2n}, p\underline{y}, p\underline{y}^{2n}, pt, pt^n\}/(t - \underline{x} \cdot \underline{y}).$$

Ces ouverts sont de dimension $2N$ et sont munis des coordonnées $\underline{x}, \underline{y}$. Le faisceau des formes différentielles est

$$\Omega^1_{V_n} = \mathcal{O}_{V_n} d\underline{x} \bigoplus \mathcal{O}_{V_n} d\underline{y} \bigoplus dt \,/ dt - \underline{x} d\underline{y} - \underline{y} d\underline{x}$$

Une base de voisinages stricts de $\mathbf{A}^1_k$ dans $\mathbf{P}^{1,an}_K$ est donnée par les ouverts $W_n = D(0, p^{1/n})$ et on remarque que $s_{2,K}$ envoie V_n dans W_n. En effet, si $(\underline{x}, \underline{y}, t) \in V_n$, $|t - \underline{x} \cdot \underline{y}| \leq p^{\frac{-1}{n}}$, $|\underline{x}| \leq p^{\frac{1}{2n}}$, et $|\underline{y}| \leq p^{\frac{1}{2n}}$, alors $|t| \leq p^{\frac{1}{n}}$.

Sur V_n, la réalisation de $\delta^* L_\pi$ est donnée par l'image inverse de la connexion définie par L_π sur W_n, c'est-à-dire par le couple $(\mathcal{O}_{V_n}, \nabla)$, où $\nabla(1) = -\pi dt$, soit encore $\nabla(1) = -\pi \sum_{i=1}^{N} (x_i dy_i + y_i dx_i)$.

On s'intéresse ici à la réalisation de $\delta^* L_\pi$ relativement à la compactification par le produit des espaces projectifs de dimension N. Notons r_1 la projection de P sur les deux premiers facteurs et notons $s_1 = r_1 \circ i$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} T_0\times T_0^\vee & \hookrightarrow & G_0 & \hookrightarrow & G \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle s_1} & & \downarrow{\scriptstyle s_1} \\ X_0\times X_0^\vee & \hookrightarrow & Y_0\times Y_0^\vee & \hookrightarrow & Y\times Y^\vee. \end{array}$$

L'application s_1 est propre de sorte que s_1 définit une équivalence de catégories entre les isocristaux surconvergents sur G_K (le long du fermé complémentaire de $T_0 \times T_0^\vee$ dans G_0) et ceux surconvergents sur $Y_K \times Y_K^\vee$ (le long du fermé complémentaire de $T_0 \times T_0^\vee$) (cf le théorème 2.3.5 de [Ber96a]). Une base de voisinages stricts de $T_0 \times T_0^\vee$ dans $Y_K \times Y_K^\vee$ est $W'_n = D(0, p^{\frac{1}{n}})$ et il est évident que $s_{1,K}(V_n) \subset W'_{2n}$. On sait de plus que les sections horizontales des modules à connexion sont les mêmes. Sur l'ouvert V_n, les sections horizontales sont les sections de $\mathcal{O}_{V_n}$ vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \forall i, & \frac{\partial f}{\partial x_i} - \pi y_i = 0 \\ \forall i, & \frac{\partial f}{\partial y_i} - \pi x_i = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant le module à connexion intégrable M_π, défini de la façon suivante sur $Y_K \times Y_K^\vee$. Le module à connexion sous-jacent est le faisceau $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0\times Y_0^\vee[}$, muni de la connexion ∇ définie par $\nabla(1) = -\pi(\sum_{i=1}^N x_i dy_i + y_i dx_i)$. On vérifie que cette connexion est intégrable et est munie d'une structure de Frobenius donnée par :

$$\begin{array}{rcl} j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0\times Y_0^\vee[} & \to & j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0\times Y_0^\vee[} \\ (\underline{x}, \underline{y}) & \mapsto & exp(\pi(\sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i^p y_i^p)). \end{array}$$

En effet, le rayon de convergence de la série $exp(\pi(t-t^p))$ est égal à p^{p-1/p^2}, de sorte que la série définissant la structure de Frobenius est un élément de $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0\times Y_0^\vee[}$. Ceci implique que le F-isocristal M_π ainsi défini est surconvergent le long du diviseur complémentaire de $X_0 \times X_0^\vee$ dans $Y_0 \times Y_0^\vee$. Comme $s_1^* M_\pi$ coïncide avec la réalisation de $\delta^* L_\pi$ sur $X_0 \times X_0^\vee \subset G_0$ ce F-isocristal est la réalisation cherchée de $\delta^* L_\pi$ sur $X_0 \times X_0^\vee \subset Y_0 \times Y_0^\vee$. On en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 3.1.2.1. *Avec les notations ci-dessus, la réalisation du F-isocristal $\delta^* L_\pi$ est donnée pour ($\mathbf{A}^N_{X_0} \times {\mathbf{A}^N}^\vee_{X_0}$, $\mathbf{P}^N_{X_0} \times {\mathbf{P}^N}^\vee_{X_0}$), sur $Y_K \times Y_K^\vee = \mathbf{P}^N_X \times {\mathbf{P}^N}^\vee_X$ par le faisceau $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y_0\times Y_0^\vee[}$ muni de la connexion surconvergente définie par $\nabla(1) = -\pi(\sum_{i=1}^N x_i dy_i + y_i dx_i)$.*

3.2. Définition de la transformation de Fourier.

Nous reprenons les notations de 2.1 qui fixent les diviseurs considérés sur les schémas formels Y, $Y^\vee$ et Z. On introduit alors les catégories $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ et $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, relatives aux diviseurs considérés. Les foncteurs ci-dessous seront aussi définis relativement à ce choix de diviseurs.

Si M et N sont deux complexes de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}({}^\dagger\infty))$, on note

$$M\tilde{\otimes}_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}}N = M\otimes^L_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}}N \quad [-2N].$$

On considère le diagramme de S-schémas formels

$$\begin{tikzcd} & Y \times Y^\vee \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Y & & Y^\vee. \end{tikzcd}$$

Définition 3.2.1. *Soit M un complexe de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^\dagger\infty))$, on pose*

$$\mathcal{F}_\pi(M) = p_{2+}\left(p_1^!(M)\tilde{\otimes}_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}}K_\pi\right).$$

Comme les projections p_1 et p_2 sont lisses, il résulte des résultats généraux, que le complexe $p_1^!(M)\tilde{\otimes}_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}}K_\pi$ est dans la catégorie $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty))$. On démontrera ultérieurement que $\mathcal{F}_\pi(M)$ est en fait un élément de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty))$.

On remarque tout de suite que la transformation de Fourier est locale sur la base. Soit U un ouvert de X, $\mathcal{F}_{\pi,U}$ et $\mathcal{F}_{\pi,X}$ les transformés de Fourier relativement aux ouverts X et U.

Proposition 3.2.2. *Soit M un élément de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}({}^\dagger\infty))$, alors il existe un isomorphisme canonique : $\mathcal{F}_{\pi,X}(M)_{|U} \simeq \mathcal{F}_{\pi,U}(M_{|U})$.*

Démonstration. Le schéma formel $Y \times_X Y^\vee \times_X U$ est canoniquement isomorphe au schéma formel $Y_U \times_X Y_U^\vee$ et la fibre de Z au-dessus de $Y_U^\vee$ à Z_U. La formation du faisceau

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes^L_{\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)} p_1^! M\tilde{\otimes}K_\pi,$$

commute clairement aux changements de base sur la base X. Comme le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est de dimension cohomologique finie, ce complexe $\mathcal{H}$ est un élément de la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée de faisceaux de groupes abéliens sur Z notée $D^b(\mathbf{Z})$. Pour montrer l'assertion, il suffit donc de montrer que pour tout élément F de $D^b(\mathbf{Z})$, on a un isomorphisme canonique

$$Rp_{2*}(F)_{|Y_U} \xrightarrow{\sim} Rp_{2,U*}(F_{|Z_U}),$$

où $p_{2,U*}$ est la projection $Z_U \to Y_U^\vee$. Par dévissage, on se ramène au cas d'un faisceau, pour lequel l'assertion est claire puisque, si V est un ouvert de $Y_U^\vee$, alors $p_2^{-1}(V) = p_{2,U}^{-1}(V)$.

Les propriétés que nous allons montrer sur la transformation de Fourier sont locales sur la base X. En particulier, on les démontrera en se restreignant au cas où le fibré vectoriel E est trivial. L'objet de la section qui suit est de calculer le transformé de Fourier du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. Nous en déduirons que la transformation de Fourier préserve la cohérence, ainsi que la comparaison avec la transformation de Fourier formelle.

Une remarque importante est que la transformation de Fourier préserve la structure de Frobenius. Pour voir cela, il suffit d'appliquer les théorèmes de commutation à l'action de Frobenius, qu'on trouve dans 3 de [Ber00], puisque le noyau de la transformation de Fourier est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ module.

4. Calcul du transformé de Fourier du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}$.

4.1. Notations des coordonnées.

Le calcul nécessite plusieurs étapes. Il existe un recouvrement fini de X par des ouverts W_r, tels que le fibré vectoriel E soit libre de rang N sur chaque W_r. Pour chaque r, on choisit des coordonnées $x_1^r, \dots, x_N^r$ sur E. Les restrictions de Y et $Y^\vee$ à W_r s'identifient alors respectivement à l'espace projectif de dimension N muni de coordonnées $u_0^r, \dots, u_N^r$ et à l'espace projectif dual muni des coordonnées duales $v_0^r, \dots, v_N^r$. Les espaces T_{W_r} et $T^\vee_{W_r}$ s'identifient de même à l'espace affine de dimension N sur X et à l'espace affine dual de dimension N, munis des coordonnées $x_l^r = u_l^r/u_0^r$ et des coordonnées duales $y_l^r = v_l^r/v_0^r$.

Le schéma Z est réunion finie des schémas $Z_{W_r} = Y_{W_r} \times_{W_r} Y^\vee_{W_r}$. C'est sur ces schémas que nous ferons le calcul.

La plupart du temps, il ne sera pas nécessaire de spécifier le r. Dans ce cas, nous ne noterons pas le r en exposant dans les notations des coordonnées.

Nous commençons par la proposition suivante.

4.2. Calcul de l'image inverse tensorisée par le noyau de la transformation de Fourier.

Pour calculer l'image inverse de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}$, il faut remarquer que l'on a une résolution du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}$ par un complexe de Spencer. Précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *L'homomorphisme $\varepsilon : \mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, défini par $P \mapsto P.(1\otimes 1)$ fait du complexe de Spencer suivant une résolution du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ comme $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche :*

$$0 \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{O}^{\dagger}_{Z,\mathbf{Q}}} \Lambda^N \tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y} \to \dots \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{O}^{\dagger}_{Z,\mathbf{Q}}} \tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y} \xrightarrow{d_0} \mathcal{D}^{\dagger}_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \to 0.$$

Démonstration. Notons $K_\bullet$ le complexe de Spencer considéré, les termes K_i de ce complexe étant numérotés de N à 0. Ce complexe est déjà introduit dans

3.2 de [Ber90]. Nous rappelons la définition de la différentielle

$$\begin{aligned} d_n(P \otimes \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \ldots \wedge \partial_n) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} P\partial_i \otimes \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_i} \ldots \wedge \partial_n \\ &+ \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} P \otimes [\partial_i, \partial_j] \wedge \partial_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_j} \wedge \ldots \wedge \partial_n. \end{aligned}$$

C'est un calcul facile de voir que ceci définit bien un complexe. Considérons un ouvert affine W de X muni de coordonnées locales relativement à S, notées $w_1, \ldots, w_r$ tel que E_W soit trivial. On reprend les notations de 4.1 en notant $u_0, \ldots, u_N$ les coordonnées sur Y et $v_0, \ldots, v_N$ les coordonnées sur $Y^\vee$. Introduisons ∂_1, ..., ∂_N, $\partial'_1, \ldots, \partial'_N$ les dérivations correspondantes aux variables x_i et y_j sur Y_W et $Y^\vee_W$. On dispose ainsi d'une base de $\tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}$ comme $\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}$-module sur Z_W. Posons $A = R[\partial'_1, \ldots, \partial'_N]$, qui est un anneau commutatif. Rappelons que $U = T \times T^\vee$. Remarquons que la suite d'éléments $\partial'_1, \ldots, \partial'_N$ est A-régulière pour les faisceaux de A-modules $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W}$. Les différentielles du complexe $K_\bullet$ relativement aux ∂'_l se simplifient et cela montre que le complexe considéré, en restriction à Z_W, est le complexe de Koszul du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ relativement à la suite $\partial'_1, \ldots, \partial'_N$. Comme cette suite d'éléments de A est $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W}$-régulière, le complexe $K_{\bullet|U_W}$ est une résolution de

$$\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W} / \sum_{i=1}^{N} \mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W} \partial'_i,$$

c'est-à-dire une résolution de $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W}$. Considérons maintenant le complexe $K_{\bullet|Z_W} \to \mathcal{D}^\dagger_{Z_W/S,\mathbf{Q}}(\infty)/\sum_{i=1}^{N} \mathcal{D}^\dagger_{Z_W/S,\mathbf{Q}}(\infty)\partial'_i$. Le raisonnement précédent montre que ce complexe tensorisé par $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)_{|U_W}$ est exact. Cela montre le lemme, en appliquant le résultat de fidèle platitude (4.3.10 de [Ber96b]) mentionné en 1.2.

4.2.2. Tensorisation par le module de Dwork. Tensorisons maintenant par le noyau de la transformation de Fourier. Comme le module $\delta^* L_\pi$ est égal à $\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}$, le complexe $K_{1,\bullet} = K_\bullet \otimes \delta^* L_\pi$ est une résolution $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire à gauche de

$$\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes^L_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}} \delta^* L_\pi,$$

et la différentielle est donnée par $d_{1,n} = d_n \otimes id$. Pour préciser la fait que la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module de $\delta^* L_\pi$ n'est pas la struture canonique sur $\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}$, nous noterons “e” l'élément “1” de $\delta^* L_\pi$. D'autre part, il existe des isomorphismes canoniques σ_n de $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche

$$\begin{array}{ccc} K'_n = \mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}} \Lambda^n \tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y} & \longrightarrow & K_{1,n} = (\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}} \Lambda^n \tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}) \otimes_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}} \delta^* L_\pi \\ P \otimes \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \ldots \wedge \partial_n & \longmapsto & P.(1 \otimes \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \ldots \wedge \partial_n \otimes e), \end{array}$$

où K'_n est muni de la structure de $\mathcal{D}$-module induite, et $K_{1,n}$ de la structure tordue par le produit tensoriel. Cet isomorphisme est classique en théorie des $\mathcal{D}$-modules et sera noté σ_n.

Ceci montre finalement que le complexe $K_{1,\bullet}$ est quasi-isomorphe au complexe $K'_\bullet$, dont le terme général est K'_n pour $0 \leq n \leq N$. Calculons la différentielle induite via cette identification à partir du diagramme

$$\begin{tikzcd} K'_n \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & K_{1,n} \arrow[d, "d_{1,n}"'] \\ K'_{n-1} \arrow[r, "\sigma_{n-1}"] & K_{1,n-1}. \end{tikzcd}$$

On en déduit la formule suivante

$$d'_n = \sigma_{n-1}^{-1} \circ d_{1,n} \circ \sigma_n.$$

Comme d'_n est $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}$-linéaire, il suffit de calculer $d'_n(1 \otimes \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \ldots \wedge \partial_n)$. Pour une section locale ∂ de $\tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}$), on note $\partial(1)$ la valeur de $\partial(1) \in \delta^* L_\pi$ qu'on regarde comme un élément de $\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}$.

Un premier calcul donne

$$\sigma_{n-1}\Big((\partial_i - \partial_i(1)) \otimes \partial_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_i} \wedge \ldots \wedge \partial_n\Big) = \partial_i \otimes \partial_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_i} \wedge \ldots \wedge \partial_n \otimes e.$$

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} d'_n(1 \otimes \partial_1 \wedge \ldots \partial_n) & = & \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(\partial_i - \partial_i(1)) \otimes \partial_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_i} \wedge \ldots \wedge \partial_n) \\ & + & \sum_{i=1}^n \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [\partial_i, \partial_j] \wedge \partial_1 \wedge \ldots \widehat{\partial_i} \wedge \widehat{\partial_j} \wedge \ldots \wedge \partial_n. \end{array}$$

Le morphisme d'augmentation $\varepsilon' : \mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \to \mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes \delta^* L_\pi$ est donné par $\varepsilon' = (\varepsilon \otimes id) \circ \sigma_0$. Dans la suite, on identifiera le but de cette flèche à $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, ce qui donne la formule suivante pour ε' appliqué à une dérivation ∂_i

$$\varepsilon'(\partial_i) = \partial_i + \partial_i(1) \in \mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty).$$

4.2.3. Calcul du résultat sur un ouvert de trivialité du fibré vectoriel. On reprend les notations de 4.1 sur un ouvert de trivialité du fibré vectoriel. Dans ce cas, on distingue les coordonnées x_i venant de Y et les coordonnées duales y_i. Les calculs ci-dessous donnent le résultat suivant. Pour le calcul de ε', on a identifié $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes \delta^* L_\pi$ à $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

Lemme 4.2.4. *Le complexe $K'_\bullet$ décrit ci-dessus est une résolution $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire de $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes \delta^* L_\pi$. Sur un ouvert W sur lequel on a choisi des coordonnées notées comme en* 4.1*, la différentielle est donnée par la formule*

$$d'_n(P \otimes \partial_{y_i} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}}) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} P \cdot (\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l}) \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_{y_{i_l}}} \wedge \ldots \partial_{y_{i_n}}.$$

D'autre part, l'homomorphisme d'augmentation $\varepsilon' : K'_0 \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ *est défini par*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon'(\partial_{y_i}) & = & -\pi x_i \\ \varepsilon'(\partial_{x_i}) & = & \partial_{x_i} - \pi y_i, \end{array}$$

pour tout $1 \leq i \leq N$.

4.3. Calcul de l'image directe par la deuxième projection.

Pour faire les calculs plus facilement, nous allons modifier la construction de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

4.3.1. Une autre description du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ La première remarque est que l'on peut faire les constructions de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ avec le faisceau

$$\mathcal{B}'^{(m)}_Z = p_1^*\mathcal{B}^{(m)}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Z} p_2^*\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}.$$

En effet, ce faisceau est muni d'une action naturelle de $\mathcal{D}^{(m)}_Z$-module à gauche. Soient $\alpha_1^{(m)}$ (resp. $\alpha_2^{(m)}$) l'application canonique $p_1^*\mathcal{B}^{(m)}_Y \to \mathcal{B}^{(m)}_Z$ (resp. $p_2^*\mathcal{B}^{(m)}_Y \to \mathcal{B}^{(m)}_Z$), et $\alpha^{(m)} = \alpha_1^{(m)} \otimes \alpha_2^{(m)}$. Plaçons-nous sur un ouvert W tel que $E_{|W}$ soit libre et reprenons les notations de 4.1.

Sur $V_{i,j} = D_+(u_i) \times D_+(v_j) \bigcap Z_W$, on a la description suivante de ces faisceaux

$$\mathcal{B}^{(m+1)}_Z(V_{i,j}) = \mathcal{O}_Z(V_{i,j})[T_1, T_2] \Bigg/ \left(\left(\frac{u_0}{u_i}\right)^{p^{m+2}} T_1 - p, \left(\frac{v_0}{v_j}\right)^{p^{m+2}} T_2 - p\right),$$

$$\mathcal{B}^{(m)}_Z(V_{i,j}) = \mathcal{O}_Z(V_{i,j})[T] \Bigg/ \left(\frac{u_0}{u_i}\frac{v_0}{v_j}\right)^{p^{m+1}} T - p\ .$$

Considérons maintenant l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_Z(V_{i,j})[T] & \to & \mathcal{B}'^{(m+1)}_{Z,\mathbf{Q}}(V_{i,j}) \\ T & \mapsto & p\left(\frac{u_0}{u_i}\right)^{p^{m+1}}\left(\frac{v_0}{v_j}\right)^{p^{m+1}}. \end{array}$$

On observe que cette application se recolle sur tous les ouverts $V_{i,j}$ et envoie $p\mathcal{O}_Z[T]$ dans $\mathcal{B}'^{(m+1)}_Z$. On en déduit une application $\mathcal{O}_Z$-linéaire $\beta^{(m)} : \mathcal{B}^{(m)}_Z \to \mathcal{B}'^{(m+1)}_Z$ qui est telle que $\alpha^{(m+1)} \circ \beta^{(m)} = pi_{m,m+1}$ et $\beta^{(m)} \circ \alpha^{(m)} = pi'_{m,m+1}$, où $i_{m,m+1}$ (resp. $i'_{m,m+1}$) est l'inclusion canonique de $\mathcal{B}^{(m)}_Z \to \mathcal{B}^{(m+1)}_Z$ (resp. de $\mathcal{B}'^{(m)}_Z$ dans $\mathcal{B}'^{(m+1)}_Z$). Posons maintenant

$$\mathcal{D}'^{(m)}_{Y^\vee\leftarrow Z/S}(\infty) = \mathcal{B}'^{(m)}_Z \otimes_{p_2^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}} p_2^{-1}\mathcal{A}^{(m)}_{Y^\vee/S},$$

où $\mathcal{A}^{(m)}_{Y^\vee/S}$ est le faisceau introduit en 2.3.2 (à cette différence que le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}$ ici n'est pas complété) et $\widehat{\mathcal{D}'}^{(m)}_{Y^\vee\leftarrow Z/S}(\infty)$ son complété p-adique. Il résulte des considérations précédentes et d'estimations analogues à celles utilisées en 2.3.4 que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \simeq \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty).$$

Nous utiliserons cette description pour faire le calcul de $Rp_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\to Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. Comme l'espace topologique sous-jacent à Z est noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive et on est ramené à calculer la cohomologie des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{Y^\vee\to Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. Considérons pour cela le diagramme d'espaces annelés

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{B}'^{(m)}_Z) \arrow[r, "p'_1"] \arrow[d, "p'_2"] & (Y, \mathcal{B}^{(m)}_Y) \arrow[d, "f"] \\
(Y^\vee, \mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}) \arrow[r, "u"] & (X, \mathcal{O}_X).
\end{tikzcd}$$

Le morphisme f est séparé de type fini. Le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}$ est sans torsion de sorte que u est plat. La formule de changement de base pour la cohomologie donne donc un isomorphisme canonique

$$Rp'_{2*}\mathcal{B}'^{(m)}_Z = Rp'_{2*}(p'^*_1\mathcal{B}^{(m)}_Y) \simeq u^* Rf_*\mathcal{B}^{(m)}_Y.$$

La cohomologie de ces faisceaux s'obtient facilement à partir de l'appendice à [Huy97]. Le complexe calculant $Rf_*\mathcal{B}^{(m)}_Y$ est réduit au dégré 0, et $R^0f_*\mathcal{B}^{(m)}_Y = \bigoplus_{|\underline{l}|}\mathcal{O}_X p^{\nu_m(\underline{l})}\underline{x}^{\underline{l}}$. La formule de la projection appliquée à p'_2 donne alors

$$Rp_{2*}\left(p'^*_2\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}\otimes^L_{p'^{-1}_2\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}} p'^{-1}_2\mathcal{A}^{(m)}_{Y^\vee}(\infty)\right) \quad = \quad Rp_{2*}\mathcal{B}'^{(m)}_Z\otimes_{\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}}\mathcal{A}^{(m)}_{Y^\vee/S}.$$

Le complexe $Rp'_{2*}\mathcal{D}'^{(m)}_{Z\to Y^\vee/S}(\infty)$ est donc réduit au degré 0 où il est isomorphe, au-dessus de W, à

$$R^0p'_{2*}\mathcal{D}'^{(m)}_{Z\to Y^\vee}(\infty) = \bigoplus_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}\mathcal{B}^{(m)}_{Y^\vee}p^{\nu_m(\underline{l})}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}_w^{\langle\underline{k}'\rangle_{(m)}}\underline{\partial}_y^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}.$$

On en déduit formellement que le faisceau $Rp'_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est représenté par un complexe réduit en degré 0. On calcule le terme de degré 0 en complétant et en passant à la limite sur m dans la description précédente. Ce qui donne le résultat suivant, sur un ouvert $W' \subset Y^\vee_W$.

$$R^0p'_{2*}\widehat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W') = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} p^{\nu_m(\underline{l})} b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} \mid b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{W',\mathbf{Q}}(W') \text{ et } \right.$$

$$\left. \mathrm{v}_p(b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}) \to +\infty \text{ si } |\underline{k}| + |\underline{k}'| + |\underline{l}| \to +\infty \right\},$$

$$Rp^0_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W') = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{[\underline{k}']} \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]} \, | b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \mathcal{O}^\dagger_{Y^\vee,\mathbf{Q}}(W') \text{ et } \right.$$

$$\left. \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}|_p \leq C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}'|+|\underline{k}|} \right\}.$$

4.3.2. Fin du calcul Le complexe $K'_\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche plats. Le complexe suivant

$$K''_\bullet = \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)} K'_\bullet$$

est quasi-isomorphe au complexe

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes^L_{\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)} K'_\bullet.$$

Comme les faisceaux $\Lambda^n\tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}$ sont libres au-dessus de Z_W d'après 2.1.1, le terme général de ce complexe est à termes acycliques pour p_{2*}. D'autre part, le complexe $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ est quasi-isomorphe au complexe $L_\bullet$.

Finalement, l'image directe par Rp_{2*} du complexe $K''_\bullet$ est calculée par le complexe $L_\bullet$ défini par

$$L_n = p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}} \Lambda^n\tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}).$$

On remarquera que le terme de degré 0 de ce complexe est $p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

On en déduit la proposition suivante

Proposition 4.3.3. *Il existe un homomorphisme $q_2^{-1}\mathcal{O}_X$-linéaire canonique*

$$q_2^{-1}\Lambda^N E[N-2] \to \mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, le module $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ est le quotient de l'application d''_1 :

$$p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes \Lambda^1\tilde{\mathcal{T}}_{Z/Y}) \to p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un homomorphisme $q_2^{-1}\mathcal{O}_X$-linéaire canonique

$$q_2^{-1}\Lambda^N E \to \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty).$$

Par définition, le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ s'identifie à

$$\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}}\omega_{\widetilde{Z/Y^\vee}},$$

c'est-à-dire, d'après 2.1.1 à

$$\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{p_2^{-1}q_2^{-1}\mathcal{O}_X}\Lambda^N p_2^{-1}q_2^{-1}E.$$

On dispose d'une flèche canonique (et d'une autre flèche canonique après avoir composé par p_{2*})

$$\begin{array}{ccc} p_2^{-1}q_2^{-1}\Lambda^N E & \longrightarrow & \mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{p_2^{-1}q_2^{-1}\mathcal{O}_X} p_2^{-1}q_2^{-1}\Lambda^N E \\ \\ e & \longmapsto & 1\otimes 1\otimes e. \end{array}$$

Le morphisme d'adjonction pour p_2 appliqué au faisceau $p_2^{-1}q_2^{-1}E$ donne une flèche canonique $q_2^{-1}\Lambda^N E\to p_{2*}p_2^{-1}q_2^{-1}E$ qui donne finalement la flèche cherchée.

Dans l'énoncé qui suit, on considère le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ comme un complexe placé en degré 0.

Théorème 4.3.4. *La flèche*

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{O}_{Y^\vee}} q_2^*\Lambda^N E[N-2]\to\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$$

définit un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche cohérents.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche cohérent va provenir du fait que la flèche ci-dessus est un quasi-isomorphisme de complexes. D'autre part, le fait que l'on a un quasi-isomorphisme est une question locale sur $Y^\vee$. Plaçons-nous sur un ouvert W de X, muni de coordonnées locales $(w_1,\ldots,w_r)$, et tel que $E_{|W}$ soit libre, de base $(x_1,\ldots,x_N)$ ($(y_1,\ldots,y_N)$ sera la base duale). On va démontrer le théorème sur tout ouvert affine $W'\subset Y^\vee_W$. Le transformé de Fourier $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ est quasi-isomorphe au complexe $L_\bullet$, qu'on continuera à noter $L_\bullet$ au-dessus de W'.

Comme faisceau de groupes abéliens, $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. La structure de $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à droite (resp. $p_2^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche) est obtenue en tordant par l'opérateur transposé la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche (resp. $p_2^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à droite) de $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ (cf 1.2.6 de [Ber00]). Ces actions obtenues par transposition seront notées avec le symbole $*$. En particulier, l'opérateur $*(\partial_{y_k}+\pi x_k)$ agissant à droite sur $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est l'opérateur transposé $(-\partial_{y_k}+\pi x_k)$ agissant à gauche sur $\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

Notons

$$A=\Gamma(W',p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty))$$

$$= \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k'},\underline{k}} b_{\underline{l},\underline{k'},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{[\underline{k'}]} \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]} \mid b_{\underline{l},\underline{k'},\underline{k}} \in \mathcal{O}^{\dagger}_{W',\mathbf{Q}}(W') \text{ et } \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |b_{\underline{l},\underline{k'},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k'}|+|\underline{k}|} \right\},$$

où dans cette formule $\underline{l} \in \mathbf{N}^N$, $\underline{k'} \in \mathbf{N}^r$, $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$. Le terme général du complexe $L_n(W')$ est donc

$$L_n(W') = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)} A\partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}},$$

et la différentielle est donnée par $d_n : L_n(W') \to L_{n-1}(W')$ définie par

$$d_n(P \otimes \partial_{y_i} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}}) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} P * (\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l}) \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_{y_{i_l}}} \wedge \ldots \partial_{y_{i_n}}.$$

Un premier résultat fondamental est que le complexe $L_\bullet$ est acyclique, sauf en degré 0. L'argument repose sur un lemme de décomposition qui est le suivant. On définit

$$A_i = \{P \in A \mid b_{\underline{l},\underline{k'},\underline{k}} = 0 \ si \ l_i \neq 0\}.$$

Cette algèbre est une sous-algèbre de A (et un sous $\Gamma(W', \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}})$-module).

Lemme 4.3.4.1. *Il existe des applications $\Gamma(W', \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty))$-linéaires à gauche $\varphi_i : A \to A$ et $\psi_i : A \to A_i$ tels que, pour tout $P \in A$, $P = \varphi_i(P) * (\partial_{y_i} + \pi x_i) + \psi_i(P)$ (cette égalité ayant un sens dans A). D'autre part, on a la relation, si $i \neq k$, $\varphi_i(P * (\partial_{y_k} + \pi x_k)) = \varphi_i(P) * (\partial_{y_k} + \pi x_k)$ et $\varphi_i(P * (\partial_{y_i} + \pi x_i)) = P$.*

Remarque. Ces applications sont compatibles aux inclusions $W'' \subset W'$ et définissent des morphismes de faisceaux $p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty) \to p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

Sur $V_{0,0}$, l'action des éléments ∂_{y_i} et $(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ commute. Du fait de l'injection

$$p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W') \subset p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W' \bigcap V_{0,0}),$$

c'est aussi vrai dans $p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$. De même, les opérateurs ∂_{y_k} commutent avec les opérateurs x_i et ∂_{y_i} pour $i \neq k$. Introduisons $A^{(m)} = p_{2*}\mathcal{D}^{(m)\prime}_{Y^\vee \leftarrow Z/S}(\infty)(V_j)$, comme introduit en 4.3.1 et $\widehat{A}^{(m)}$ les algèbres complétées. Les algèbres $\widehat{A}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ constituent une filtration de A. Pour démontrer le lemme, on construit les applications φ_i et ψ_i pour les algèbres complètes $\widehat{A}^{(m)}$. A un niveau fini, nous avons l'énoncé suivant.

Lemme 4.3.4.2. *Il existe des applications $\mathcal{A}^{(m)}_{Y^\vee/S}(W')$-linéaires à gauche $\varphi : A^{(m)} \to A^{(m+2)}$ et $\psi : A^{(m)}_i \to A^{(m+2)}_i$ et un entier naturel c tel que, pour tout $P \in A^{(m)}$, $p^c P = \varphi(P) * (\partial_{y_i} + \pi x_i) + \psi(P)$.*

Démonstration. Comme les éléments $(-\partial_{y_i}+\pi x_i)$ et ∂_{y_i} commutent, on a la relation

$$\begin{aligned} x_i^{l_i} &= \frac{1}{\pi^{l_i}}\left((-\partial_{y_i}+\pi x_i)+\partial_{y_i}\right)^{l_i} \\ &= \frac{1}{\pi^{l_i}}\partial_{y_i}^{l_i}+(-\partial_{y_i}+\pi x_i)\sum_{t=1}^{l_i}\sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-1+s}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}\binom{l_i}{t}\binom{t-1}{s}x_i^s\partial_{y_i}^{l_i-1-s}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} x_i^{l_i} &= \frac{l_i!}{q_{l_i}^{(m+2)}!\pi^{l_i}}\partial_{y_i}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m+2)}} \\ &\quad +(-\partial_{y_i}+\pi x_i)\sum_{t=1}^{l_i}\sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-1+s}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}\binom{l_i}{t}\binom{t-1}{s}\frac{(l_i-1-s)!}{q_{l_i-1-s}^{(m+2)}!}x_i^s\partial_{y_i}^{\langle l_i-1-s\rangle_{(m+2)}}. \end{aligned}$$

On écrira cette décomposition

$$x_i^{l_i}=R'_{l_i}+(-\partial_{y_i}+\pi x_i)Q'_{l_i}.$$

En utilisant les inégalités 1.2, on voit que, pour tout $t\leq l_i$, et pour tout $s\leq t-1$:

$$C(l_i,m,s)=\mathrm{v}_p\left(p^{\nu_m(l_i)}\frac{(l_i-1-s)!}{q_{l_i-1-s}^{(m+2)}!}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}p^{-\nu_{m+2}(s)}\right)$$

est minoré par

$$\frac{l_i}{p^{m+1}}+\left(\frac{l_i-1-s}{p-1}-log(l_i-s)-1\right)-\frac{l_i-1-s}{p^{m+2}(p-1)}-\frac{l_i-s}{p-1}-\frac{s}{p^{m+3}}-1.$$

En majorant $log_p(l_i-s)$ par $log_p(l_i)$, on obtient :

$$C(l_i,m,s)\quad\geq\quad\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\frac{l_i}{p^{m+1}}-log(l_i)-3.\right)$$

Soit c_1 un minorant de cette quantité pour tout $l_i\in\mathbf{N}^*$. On dispose de même de l'inégalité :

$$\mathrm{v}_p\left(p^{\nu_m(l_i)}\frac{l_i!}{q_{l_i}^{(m+2)!}\pi^{l_i}}\right)\quad\geq\quad\left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{l_i}{p^{m+1}}-log(l_i)-1\geq c_1$$

Soit $c=\min\{c_1,0\}$. Pour tout $l_i\geq 1$, considérons maintenant les opérateurs suivants de $p^{-c}A^{(m+2)}$ (resp. $p^{-c}A_i^{(m+2)}$), $Q_{l_i}=p^{\nu_m(l_i)}Q'_{l_i}$ et $R_{l_i}=p^{\nu_m(l_i)}R'_{l_i}$. On pose aussi $Q_0=0$ et $R_0=1$. Par construction, on a l'égalité dans $A^{(m+2)}$

$$p^c p^{\nu_m(l_i)}x_i^{l_i}=p^cQ_{l_i}*(\partial_{y_i}+\pi x_i)+p^cR_{l_i}.$$

Soit maintenant $P\in A^{(m)}$ tel que P s'écrive $P=\sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}\partial_w^{\langle\underline{k}'\rangle_{(m)}}\underline{\partial}_y^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}b_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}$, soit encore $P=\sum_{\underline{l},\underline{k}}p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}_y^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}R_{\underline{l},\underline{k}}$ on pose

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= p^c \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} p^{\nu_m(|\underline{l}|)-\nu_m(l_i)} Q_{l_i} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} R_{\underline{l},\underline{k}},\\
\psi(P) &= p^c \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} p^{\nu_m(|\underline{l}|)-\nu_m(l_i)} R_{l_i} \underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} R_{\underline{l},\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Les applications φ et ψ ont alors les propriétés voulues.

Achevons la démonstration de l'existence de la décomposition. Soit $P \in A$, alors il existe un entier m tel que $P \in \widehat{A}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$. Complétons les applications que nous venons de construire en des applications de $\widehat{A}^{(m)} \to \widehat{A}^{(m+2)}$ (resp. de $\widehat{A}^{(m)}_i \to \widehat{A}^{(m+2)}_i$) en des applications $\widehat{\varphi}$ (resp. $\widehat{\psi}$) et tensorisons pas $\mathbf{Q}$. Cela donne l'égalité dans A :

$$P = p^{-c}\widehat{\varphi}(P) * (\partial_{y_i} + \pi x_i) + p^{-c}\widehat{\psi}(P),$$

et le résultat annoncé en prenant $\varphi_i = p^{-c}\widehat{\varphi}$ et $\psi_i = p^{-c}\widehat{\psi}$.

Au passage, on voit si P ne dépend pas de x_t, c'est aussi le cas du quotient Q et du reste R. La deuxième assertion de l'énoncé est facile à vérifier étant donné la définition explicite de φ_i.

La décomposition obtenue est unique sur les ouverts $W' = Y^\vee_W$ et on a le résultat suivant pour ces ouverts particuliers.

Lemme 4.3.4.3. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $P \in A$, il existe un unique couple $(Q, R) \in A \times A$, tel que $R = \sum_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} r_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{[\underline{k}']} \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]}$ où $r_{\underline{l},\underline{k}} = 0$ si $l_i \neq 0$ et vérifiant*

$$P = Q * (\partial_{y_i} + \pi x_i) + R.$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'unicité. Soit A_i le sous-anneau de A constitué des éléments R dont les coefficients $r_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}$ sont nuls si $l_i \neq 0$. Il s'agit de montrer que si $Q * (\partial_{y_i} + \pi x_i) \in A_i$, alors $Q = 0$. Notons que A se plonge dans

$$A' = p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)(\bigcap_{i=0}^{n} V_i).$$

On définit A'_i comme le sous-anneau de A' constitué des éléments R dont les coefficients $r_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}$ sont nuls si $l_i \neq 0$. En remarquant que les opérateurs ∂_{w_l} commutent avec les opérateurs $*(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ et en identifiant les coefficients des opérateurs $\underline{\partial}_w^{[\underline{k}']}$ dans les expressions de Q et du résultat $Q * (\partial_{y_i} + \pi x_i)$, on voit qu'on est ramené à montrer l'unicité pour un opérateur Q dont les coefficients $q_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}}$ sont nuls pour $\underline{k}' \neq 0$. Plaçons-nous dans ce cas et notons $Q = \sum_{\underline{l},\underline{k}} q_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]}$ tel qu'il existe $C > 0$ et $\eta < 1$ tels que $|q_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|}$, les éléments $q_{\underline{l},\underline{k}}$ étant dans

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_{W,\mathbf{Q}})\left\{y_1, \ldots, y_N, 1/y_1, \ldots, 1/y_N\right\}.$$

On calcule alors

$$Q * (\partial_{y_i} + \pi x_i) = \sum_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \left(-k_i q_{\underline{l},\underline{k}-1_i} - \frac{\partial q_{\underline{l},\underline{k}}}{\partial y_i} + \pi q_{\underline{l}-1_i,\underline{k}} \right) \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]}.$$

Finalement, $Q*(\partial_{y_i}+\pi x_i)$ est dans A'_i si et seulement si $\forall \underline{k}\in\mathbf{N}^N$, $\forall \underline{l}\in\mathbf{N}^N$, tel que $l_i\neq 0$,

$$-k_i q_{\underline{l},\underline{k}-1_i}+\frac{\partial q_{\underline{l},\underline{k}}}{\partial y_i}+\pi q_{\underline{l}-1_i,\underline{k}} \quad = \quad 0. \tag{1}$$

Supposons que Q soit non nul. Il existe $(\underline{l},\underline{k})$ tel que $q_{\underline{l},\underline{k}}$ soit non nul. Posons $\underline{l}'=\underline{l}-l_i1_i$ et $\underline{k}'=\underline{k}-k_i1_i$ et choisissons (a,b) minimal pour l'ordre lexicographique tel que $q_{\underline{l}'+b1_i,\underline{k}'+a_i}\neq 0$. Notons alors $u_c=q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}$. Cet élément se développe en série par rapport à y_i :

$$u_c=\sum_{t\in\mathbf{Z}}v_t^c y_i^t \text{ où } v_t^c\in\Gamma(W,\mathcal{O}_{W,\mathbf{Q}})\{y_1,\ldots,\widehat{y_i},\ldots,y_n\} \text{ et } |v_t^c|_p\to 0 \text{ si } |t|\to+\infty.$$

Comme $q_{\underline{l},\underline{k}'+(a-1)1_i}$ est nul pour tout $\underline{l}$, la relation (1) s'écrit encore :

$$\forall c\geq 0,\ \frac{\partial u_{c+1}}{\partial y_i}-\pi u_c \quad = \quad 0 \tag{2}$$

qui s'écrit encore

$$\forall c\geq 0,\ \sum_{t\in\mathbf{Z}}((t+1)v_{t+1}^{c+1}-\pi v_t^c)y^t=0,$$

d'où la relation de récurrence sur les suites (v_t^c)

$$\forall c\geq 0,\ \forall t\in\mathbf{Z},\ v_t^c=\frac{t+1}{\pi}v_{t+1}^{c+1}.$$

On voit donc que si $t<0$, v_t^b est nul. Soit $t_0=\min\{t|v_t^b\neq 0\}$, on a alors la relation

$$v_t^b=\frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdot(c-b+t_0)}v_{t_0}^b.$$

La norme $|.|_p$ de u_c est donnée par $|u_c|_p=sup_t|v_t^c|_p$, de sorte que

$$\forall c,\ |q_{\underline{l}'+cl_i,\underline{k}'+a1_i}|_p\geq\left|\frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdot(c-b+t_0)}\right||v_{t_0}^b|_{sp}.$$

Notons que

$$\mathrm{v}_p\left(\frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdot(c-b+t_0)}\right)=-\frac{t_0}{p-1}+\mathrm{v}_p(t_0!)+\frac{\sigma(c-b+t_0)}{p-1},$$

où $\sigma(n)$ est la somme des chiffres de n en base p. Introduisons

$$C_1=p^{\left(\frac{-t_0}{p-1}+\mathrm{v}_p(t_0!)\right)}|v_{t_0}^b|_p,$$

alors nous avons l'inégalité

$$|q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}|_p\geq C_1p^{-\frac{\sigma(c-b+t_0)}{p-1}}.$$

D'autre part, il existe $\eta<1$ et $c>0$ tels que :

$$|q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}|_p\geq\eta^{|\underline{l}'|+a+|\underline{k}'|}\eta^c,$$

ce qui achève la démonstration car $\sigma(c-b+t_0)$ ne tend pas vers $+\infty$ si c tend vers $+\infty$. Cela montre finalement l'unicité sur $Y_W^\vee$.

L'énoncé suivant porte de nouveau sur un ouvert affine quelconque W' de $Y_W^\vee$. On note $T_i = \partial_{y_i} + \pi x_i$ et $(P/T_i) = \varphi_i(P)$.

Si $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ est un multi-indice (éventuellement vide), on pose $\{\underline{i}\} = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Lemme 4.3.4.4. *Fixons $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$. Alors tout opérateur P de A se décompose*

$$P = \sum_{\underline{j} \ \mid \ \{\underline{j}\} \subset \{\underline{i}\}} P_{\underline{j}} * \prod_{j \in \{\underline{j}\}} T_j,$$

où $\forall s \in \{\underline{i}\} \backslash \{\underline{j}\}$, $(P_{\underline{j}}/T_s) = 0$.

Dans l'énoncé, l'indice $\underline{j}$ peut être vide.

Démonstration. Comme les opérateurs T_i commutent entre eux, il suffit d'appliquer successivement le lemme de décomposition. Au passage, on observera que l'application $P \mapsto P_{\underline{j}}$ est $\Gamma(W', \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty))$-linéaire à droite si $\underline{i}$ est fixé. On la notera $\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}$: l'élément $\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(P)$ est donc un élément de A qui ne dépend que de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}$. Ce lemme va permettre de montrer la proposition suivante

Proposition 4.3.5. *Le complexe $L_\bullet$ est acyclique en degrés strictement négatifs.*

Démonstration. La question est locale et on montre la proposition au-dessus d'un ouvert W' de $Y_W^\vee$, où W est un ouvert de X muni de coordonnées locales et sur lequel le fibré vectoriel E est trivial. On peut reprendre la calcul précédent de $A = \Gamma(W', p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ et le lemme de division qui précède. Notons, pour tout multi-indice $\underline{i}$ de longueur n

$$e_{\underline{i}} = \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}}.$$

Définissons les opérateurs K-linéaires $k_{n+1} : L_n(W') \to L_{n+1}(W')$ par :

$$k_{n+1}(Pe_{\underline{i}}) = \sum_{j=1}^N (P/T_j)\partial_{y_j} \wedge e_{\underline{i}}.$$

Cela donne le diagramme non commutatif suivant, dont les flèches verticales sont l'identité

$$\begin{tikzcd}
L_{n+1}(W') \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d] & L_n(W') \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] \arrow[dl, "k_{n+1}"'] & L_{n-1}(W') \arrow[d] \arrow[dl, "k_n"'] \\
L_{n+1}(W') \arrow[r, "d_{n+1}"] & L_n(W') \arrow[r, "d_n"] & L_{n-1}(W').
\end{tikzcd}$$

Nous avons alors les relations :

$$d_{n+1}k_{n+1}(Pe_{\underline{i}}) = \sum_{j=1}^N (P/T_j) * T_j e_{\underline{i}} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n (-1)^k (P/T_j) * T_{i_k} \partial_{y_j} \wedge e_{i_1, \ldots, \widehat{i_k}, \ldots i_n},$$

$$k_n d_n(Pe_{\underline{i}}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(P * T_{i_k}/T_j)\partial_{y_j} \wedge e_{i_1,\ldots,\widehat{i_k},\ldots i_n}.$$

Si $i \neq k$ et pour tout j on a les égalités $(P/T_j)*T_k = (P/T_k)*T_j$ et $(P/T_j)*T_j = P$. On en conclut que :

$$d_{n+1}k_{n+1} + k_n d_n(Pe_{\underline{i}}) = \left(nP + \sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_n\}} (P/T_j) * T_j\right) e_{\underline{i}}.$$

Considérons maintenant $\lambda_n = Nid - (d_{n+1} \circ k_{n+1} + k_n \circ d_n)$. D'après ce que l'on vient de voir, λ_n est K-linéaire et $\lambda_n(Pe_{\underline{i}}) = \left(\sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_n\}} P - (P/T_j) * T_j\right)$. Nous allons voir que λ est diagonalisable. On prolonge l'application $\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}$ obtenue à partir du lemme de décomposition en posant :

$$\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(\sum_{\underline{i}'} P_{\underline{i}'} e_{\underline{i}'}) = \sum_{\underline{i}'} \beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(P_{\underline{i}'})e_{\underline{i}'}.$$

Soit enfin

$E_l = \left\{P \in L_n(W') \text{ tels que, } \forall \underline{j}, \text{ avec } |\underline{j}| \neq N - (l+n) \text{et } \forall \underline{i} \text{ avec } |\underline{i}| = n, \beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(P_{\underline{i}}) = 0.\right\}$

En d'autres termes, on demande que $P_{\underline{i}}$ s'écrive

$$\sum_{|\underline{j}| = N-(l+n)} P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{j_1} \cdots T_{j_{N-l-n}},$$

où $P_{\underline{i},\underline{j}}$ ne dépend pas des x_k tels que $k \in \{\underline{i}^c \backslash \underline{j}\}$. Observons alors que, avec ces notations

$$\text{si } k \in \{j_1,\ldots,j_{N-l-n}\},\ P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}} - (P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}}/T_k) * T_k = 0,$$

$$\text{si } k \notin \{j_1,\ldots,j_{N-l-n}\},\ P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}} - (P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}}/T_k) * T_k = P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}}.$$

Finalement, si $P \in E_l$, $\lambda_n(P_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}} e_{\underline{i}}) = lP_{\underline{i},\underline{j}} * T_{\underline{j}} e_{\underline{i}}$ et $\lambda_n(P) = lP$, de sorte que E_l est le sous-espace propre associé à la valeur propre l. D'autre part, il découle du lemme de décomposition que $L_n(W')$ est égal à la somme directe des E_l. Soient maintenant $C_n = kerd_n$, $B_n = Imd_{n+1}$ et $P \in C_n$, dont les composantes sur E_l sont notées P_l. On dispose alors du lemme suivant

Lemme 4.3.5.1. *Soit $P \in C_n$. Alors, $\forall l \in \{0,\ldots,N-n\}$, $P_l \in C_n$.*

Démonstration. Tout d'abord, si $d_n(P) = 0$, alors on a les égalités $d_n \circ \lambda_n(P) = Nd_n(P) - d_n \circ d_{n+1} \circ k_{n+1}(P) = 0$ et donc $\lambda_n(C_n) \subset C_n$. Finalement, les itérés $\lambda_n^k(P)$ appartiennent à C_n, pour tout entier k. On en déduit

$$\left\{\begin{array}{ccc} P & = & P_0 + \ldots + P_{N-n} \ \in C_n \\ \lambda_n(P) & = & P_1 + \ldots + (N-n)P_{N-n} \ \in C_n \\ . & & \\ . & & \\ \lambda_n^{N-n}(P) & = & P_1 + \ldots + (N-n)^{N-n}P_{N-n} \ \in C_n \end{array}\right.$$

Introduisons la matrice B de taille $(N-n+1)\times(N-n+1)$ à coefficients dans K suivante

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 2 & . & . & . & N-n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 2^{N-n} & . & . & . & (N-n)^{N-n}. \end{bmatrix}$$

La matrice ${}^tB$ est inversible dans K d'inverse $A=(a_{i,j})$. Alors, $\forall i\in\{0,\ldots,N-n\}$, on a l'égalité : $P_i=\sum_{j=0}^{N-n}a_{i,j}\lambda^j(P)$ où $a_{i,j}\in\mathbf{Q}$, ce qui montre le lemme.

Terminons la démonstration de la proposition. Soit $P\in C_n$ avec $n\geq 1$. Alors, $k_n\circ d_n(P_l)+d_{n+1}\circ k_{n+1}(P_l)$ est égal à $NP_l-lP_l=(N-l)P_l$. Or, comme $l\leq N-1$, $N-l\neq 0$ et ceci montre que $P_l\in B_n$ pour tout l. C'est donc aussi le cas de P, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Terminons maintenant la démonstration du théorème 4.3.4. La question de l'isomorphisme de la flèche définie en degré 0 est locale. On se place sur un ouvert affine W' de $Y^\vee$ contenu dans un ouvert $Y^\vee_W$ de $Y^\vee$ où W est un ouvert de X muni de coordonnées locales sur lequel le fibré vectoriel E est libre de base $x_1,\ldots,x_N$. La flèche du théorème envoie alors $x_1\wedge\ldots\wedge x_N$ sur $1\otimes 1\otimes x_1\wedge\ldots\wedge x_N$. Comme précédemment, on identifie $\Gamma(W',p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ à $A=\Gamma(W',p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, avec les structures tordues de $p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$-module à droite et de $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$-module à gauche. Notons $\beta=\beta^{1,\ldots,N}_{\varnothing}$ l'application surjective introduite en 4.3.4.4, qui est à valeurs dans $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(W')(\infty)$ et est $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$-linéaire à gauche. On dispose alors du diagramme suivant de $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(W')(\infty)$-modules à gauche, dont la ligne horizontale est une suite exacte

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^N A\partial_{y_i} \arrow[r, "u"] & A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))(W') \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W'), \arrow[u, shift left, "i"] & & \end{tikzcd}$$

où i est le morphisme structural $P\mapsto P\cdot 1$. Comme on a $Im(u)=\sum_{i=1}^N A*T_i$, il découle encore de 4.3.4.4, que $Im(u)$ est exactement le noyau de β, de sorte que β induit une bijection toujours notée $\beta:\mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))(W')\to\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$. Comme cette application est $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W')$-linéaire, cela montre le théorème.

5. Premières propriétés de la transformation de Fourier

Nous donnons d'abord un théorème de comparaison avec la transformation de Fourier formelle. De ce théorème de comparaison, nous déduirons la préservation de la cohérence par transformation de Fourier géométrique, ainsi que la préservation de la structure de Frobenius et de l'holonomie.

5.1. Définition de la transformation de Fourier formelle.

On rappelle brièvement comment cette transformation est définie. On reprend les notations de 2.1. Il y a deux cas.

5.1.1. Cas où le fibré E est trivial. Dans ce cas, E est égal à $\mathcal{O}_X^N$, muni de la base canonique $x_1, \ldots, x_N$. On a la proposition suivante en notant $y_1, \ldots, y_N$ la base duale de $x_1, \ldots, x_N$, $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}$ les dérivations correspondantes sur Y, (resp. $\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_N}$ sur $Y^\vee$). On notera que d'après 2.1.1, ces éléments sont des sections globales de $\tilde{\mathcal{T}}_{Y/X,\mathbf{Q}}$. Dans l'énoncé qui suit, on regarde $\mathcal{D}^\dagger_{X/S,\mathbf{Q}}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ (resp. de $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$) via l'immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ (resp. de $X \hookrightarrow Y^\vee$).

Proposition 5.1.1.1. *Les faisceaux de $\mathcal{O}_X$-algèbres $q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ et $q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ sont canoniquement isomorphes par l'homomorphisme d'algèbres continu F_π défini par*

$$
\begin{aligned}
F_\pi(P) &= P \text{ si } P \in \mathcal{D}^\dagger_{X/S,\mathbf{Q}} \\
F_\pi(x_i) &= \frac{-\partial_{y_i}}{\pi} \\
F_\pi(\partial_{x_i}) &= \pi y_i
\end{aligned}
$$

Démonstration. On se reportera à la fin de la démonstration de la proposition suivante pour vérifier que si $P \in q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W)$ où W est un ouvert de X, alors $F_\pi(P) \in q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)(W)$ (le fait de rajouter des dérivations en les variables w ne change rien dans les formules).

5.1.2. Cas des opérateurs différentiels relatifs Dans ce cas, $X = S$. On suppose que sur un ouvert W de X, E est muni d'une base $x_1, \ldots, x_N$, dont une base duale est notée $y_1, \ldots, y_N$, les dérivations correspondantes sur Y_W et $Y_W^\vee$ étant respectivement notées $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N}$ et $\partial_{y_1}, \ldots, \partial_{y_N}$.

L'énoncé est alors le suivant.

Proposition 5.1.2.1. *Les faisceaux de $\mathcal{O}_X$-algèbres $q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/X}(\infty)$ et $q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/X}(\infty)$ sont canoniquement isomorphes par l'homomorphisme d'algèbres continu F_π défini* *au-dessus d'un ouvert W de X tel que E_W soit muni d'une base $x_1, \dots, x_N$, par*

$$\begin{aligned} F_\pi(P) &= P \text{ si } P \in \mathcal{O}_X \\ F_\pi(x_i) &= \frac{-\partial_{y_i}}{\pi} \\ F_\pi(\partial_{x_i}) &= \pi y_i \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que cette application est bien définie et ne dépend pas du choix de la base. Si $x'_1, \dots, x'_N$ est une autre base sur un ouvert W' de X, dont $y'_1, \dots, y'_N$ est la base duale, il existe une matrice de $GL_N(W \bigcap W', \mathcal{O}_X)$ telle que l'on ait la relation suivante

$$(x'_1, \dots, x'_N) = (x_1, \dots, x_N)A.$$

On en déduit les relations

$$\begin{aligned} (y'_1, \dots, y'_N) &= (y_1, \dots, y_N)^t A^{-1} && (3) \\ (\partial_{x'_1}, \dots, \partial_{x'_N}) &= (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})^t A^{-1} && (4) \\ (\partial_{y'_1}, \dots, \partial_{y'_N}) &= (\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_N})A && (5) \end{aligned}$$

On déduit de cela l'égalité matricielle suivante, en notant $F_{\pi,\underline{x}}$ la transformation de Fourier relative aux x_i (resp. $F_{\pi,\underline{x'}}$)

$$\begin{aligned} F_{\pi,\underline{x}}((x_1, \dots, x_N)) &= \frac{-1}{\pi}(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_N}) \\ &= \frac{-1}{\pi}(\partial_{y'_1}, \dots, \partial_{y'_N})A^{-1} \\ &= F_{\pi,\underline{x'}}((x'_1, \dots, x'_N)A^{-1}) \\ &= F_{\pi,\underline{x'}}((x_1, \dots, x_N)). \end{aligned}$$

On montre de même que

$$F_{\pi,\underline{x}}((\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})) = F_{\pi,\underline{x'}}(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N}),$$

et que l'application ne dépend pas du choix d'une base. Au-dessus d'un ouvert $W \subset X$ sur lequel E est libre on rappelle la description de $\Gamma(W, \mathcal{D}^\dagger_{Y/X,\mathbf{Q}}(\infty))$ établie en 2.3.4, on a

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y/X,\mathbf{Q}}(W) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(W) \text{ et} \\ \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|} \end{array} \right\}.$$

Soit P un opérateur de $\Gamma(W, \mathcal{D}^\dagger_{Y/X,\mathbf{Q}}(\infty))$. Si $P = \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$,

$$F_\pi(P) = \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}} (-1)^{|\underline{l}|} \frac{\underline{l}!}{\pi^{|\underline{l}|}} \frac{\pi^{|\underline{k}|}}{\underline{k}!} \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]} \underline{y}^{\underline{k}}.$$

D'après les inégalités rappelées en 1.1, il existe des constantes strictement positives $C, D > 0$ telles que l'on ait l'"inégalité, pour tous multi-indices $\underline{l}, \underline{k}$

$$\mathrm{v}_p(a_{\underline{l},\underline{k}}) > C(|\underline{k}| + |\underline{l}|) - D - N log_p(|\underline{l}| + 1) - N + \frac{|\underline{k}|}{p-1},$$

de sorte qu'il existe des constantes $C', D' > 0$ telles que l'on ait l'inégalité, pour tous $\underline{k}, \underline{l}$ $\mathrm{v}_p(a_{\underline{l},\underline{k}}) > C'(|\underline{k}| + |\underline{l}|) - D'$, ce qui montre que $\mathcal{F}(P) \in \Gamma(W, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/X,\mathbf{Q}}(\infty))$. La transformation de Fourier formelle est donc bien définie dans ce cas. La question de savoir si c'est un isomorphisme de faisceaux d'algèbres est locale et se ramène au cas précédent.

5.1.3. Le foncteur "Fourier formel" On se place dans l'un des deux cas précédents.

Si N est un faisceau de $q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules (resp. un élément de $D^b_{coh}(q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)))$, alors on pose

$$F^*_{\pi}N = q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)} N.$$

Comme F_{π} est un isomorphisme, F_{π} préserve la cohérence et si $N \in D^b_{coh}(q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, alors $F^*_{\pi}(N) \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty))$. On définit aussi le foncteur F^*_{π} pour les modules à droite : si N est un faisceau de $q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à droite, on pose

$$F^*_{\pi,d}N = N \otimes_{q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)} q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty),$$

qui préserve la cohérence et peut être défini pour les éléments de $D^b_{coh,d}(q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ D'autre part, le foncteur F^*_{π} commute trivialement à la dualité. L'énoncé est le suivant.

Proposition 5.1.3.1. *i Si $N \in q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, il existe un isomorphisme canonique*

$$F^*_{\pi,d}\mathcal{E}xt^i_{q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(N, q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq \mathcal{E}xt^i_{q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(F^*_{\pi}N, q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)),$$

ii si $N \in D^b_{coh}(q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b_{coh,d}(q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$

$$F^*_{\pi,d}R\mathcal{H}om_{q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(N, q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq R\mathcal{H}om_{q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(F^*_{\pi}N, q_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Démonstration. Montrons (i). L'existence d'une flèche entre le terme de gauche et le terme de droite est classique car F^*_{π} est un foncteur exact. L'assertion est locale sur $Y^{\vee}$. Comme le faisceau $q_{1*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ est de dimension cohomologique finie, le faisceau N admet localement une résolution finie, libre de rang fini. Une récurrence sur la longueur de la résolution permet alors de conclure, puisque l'énoncé est trivial pour un module libre de rang fini. Le (ii) s'en déduit par dévissage.

5.2. Comparaison avec la transformation de Fourier formelle dans le cas d'une somme directe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$.

On montre la comparaison dans le cas où le fibré est trivial. La proposition est la suivante. Soit $M = \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)^i$, alors on a la proposition suivante

Proposition 5.2.1. *Il existe un isomorphisme ne dépendant que du choix d'une trivialisation de E et de $\delta^* L_\pi$*

$$F^*_\pi q_{1*} M[N-2] \simeq q_{2*}\mathcal{F}_\pi(M).$$

Démonstration. Puisque le fibré est trivial, le choix d'une trivialisation de E permet d'identifier le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y^\vee}$ à $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \to Z}$. Si M est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, il existe un morphisme α fonctoriel en M

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Y,M) & \to & \Gamma(Z, \delta^* L_\pi \otimes \mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes p_1^{-1} M) \\ m & \mapsto & 1 \otimes 1 \otimes m. \end{array}$$

d'où finalement un homomorphisme $\alpha' : \Gamma(Y,M) \to \Gamma(Y^\vee, p_{2*}\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee \leftarrow Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \otimes \delta^* L_\pi \otimes \mathcal{D}^{\dagger}_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \otimes p_1^{-1} M$. Dans le cas où $M = \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, le but de α' s'identifie d'après le résultat précédent à $\Gamma(Y^\vee, \mathcal{F}_\pi(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))[2-N])$ et donc à $\Gamma(Y^\vee, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)))$ via l'application β précédente. Le fait que α' est une application continue est facile à voir. D'autre part, on a que $\alpha'(1) = 1$. On identifie $u \in End_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ à $\Gamma(Y, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ opérant à droite sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$. Par fonctorialité de α', et du fait que $\alpha'(1) = 1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} End_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d] & End_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \arrow[d] \\ \Gamma(Y, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \arrow[r, "\alpha'"] & \Gamma(Y^\vee, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)), \end{tikzcd}$$

ce qui montre que α' est un homomorphisme d'algèbres. Par continuité de α', il suffit de calculer $\alpha'(x_i)$ et $\alpha'(\partial_{x_i})$. Or, $\alpha(x_i) = x_i$ de sorte que $\alpha'(x_i) = \beta^{-1}(\partial_{y_i}/\pi) = -\partial_{y_i}/\pi$. D'autre part, $\alpha(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i} + \pi y_i$, de sorte que $\alpha'(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i} + \pi y_i = \pi\beta^{-1}(\pi y_i) = F(\partial_{y_i})$.

On en déduit l'assertion dans le cas d'un module libre de rang fini par fonctorialité de α.

5.3. Premières propriétés de la transformation de Fourier.

On étend le théorème de comparaison de la transformation de Fourier géométrique avec la transformation de Fourier formelle. On en déduit la préservation de la cohérence par la transformation de Fourier géométrique, ainsi que la préservation de l'holonomie.

Théorème 5.3.1. *i Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, alors $\mathcal{F}_\pi(M)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent concentré en degré $2-N$.*

ii Si $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, alors $\mathcal{F}_\pi(M) \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty))$.

iii Si $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, et si le fibré vectoriel E est trivial, il existe un isomorphisme ne dépendant que du choix d'une trivialisation de E

$$F^*_\pi\Gamma(Y,M)[N-2] \simeq \Gamma(Y^\vee,\mathcal{F}_\pi(M)).$$

Démonstration. Le (i) résultera du théorème de comparaison précédent. La question est locale sur X de sorte que l'on peut supposer que X est muni de coordonnées globales. Par dévissage, le (ii) se ramène au (i). Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. D'après 2.3.5, il existe une résolution finie de M, $E_\bullet$ par des modules libres de rang fini (ou globalement projectifs de rang fini). Comme p_1 est lisse, il existe une résolution $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire où chaque complexe est concentré en degré 0

$$p_1^![-N]E_\bullet \to \mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)} p_1^{-1}M.$$

En tensorisant sur $\mathcal{O}^\dagger_{Z,\mathbf{Q}}$ par δ^*L_π ce qui est exact, on en tire une résolution $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire

$$\delta^*L_\pi \otimes p_1^![-N]E_\bullet \to \delta^*L_\pi \otimes \mathcal{D}^\dagger_{Z\to Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)} p_1^{-1}M.$$

Soit $C_\bullet$ une résolution plate de ce complexe par des $\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche. Le complexe $C_{i,\bullet}$ est une résolution plate de $\delta^*L_\pi \otimes p_1^![-N]E_i$. En particulier, $C_{i,j}$ est nul pour $j \leq -N-1$ et le complexe $C_{\bullet\bullet}$ est à cohomologie bornée. Le complexe

$$C'_{\bullet\bullet} = \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)} C_{\bullet\bullet}$$

calcule donc

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee\leftarrow Z,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{Z/S,\mathbf{Q}}(\infty)} \delta^*L_\pi \otimes p_1^!M[-N].$$

Soit $D_{\bullet\bullet\bullet}$ une résolution de $C'_{\bullet\bullet}$ par des $p_2^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche injectifs. Alors le complexe $p_{2*}D_{\bullet\bullet\bullet}$ calcule $\mathcal{F}_\pi(M)[2-N]$. Les sous-complexes $p_{2*}D_{i,\bullet\bullet}$ calculent $\mathcal{F}_\pi(E_i)[2-N]$ et sont acycliques sauf en degré 0 d'après 4.3.5. Finalement, le complexe $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{M})[2-N]$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{F}_\pi(E_\bullet)[2-N]$ et est en particulier à cohomologie cohérente. Pour le calculer, il suffit donc de passer aux sections globales en vertu de l'équivalence de catégories 2.2.1. Or, d'après la proposition précédente, on a un isomorphisme naturel

$$F^*_\pi R\Gamma(Y,E) \simeq R\Gamma(Y^\vee,\mathcal{F}_\pi(E_\bullet))[2-N].$$

En particulier, ce complexe est acyclique en degrés non nul et sa cohomologie en degré 0 est égale à $F^*_\pi\Gamma(Y,M)$. En outre, on peut prolonger α' de $\Gamma(Y,M) \to R\Gamma(Y^\vee,\mathcal{F}_\pi(M))$ en le définissant sur la résolution $E^\bullet$ et en vérifiant que cela ne dépend pas de la résolution. Ce que l'on vient de faire donne alors le fait que α' est un isomorphisme.

Le corollaire suivant est alors formel.

Corollaire 5.3.2. *Soit $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$. Supposons que le fibré vectoriel E est trivial, alors il existe un isomorphisme ne dépendant que du choix d'une trivialisation de E*

$$F^*_\pi R\Gamma(Y, M)[N-2] \simeq R\Gamma(Y^\vee, \mathcal{F}_\pi(M)).$$

Corollaire 5.3.3. *Le foncteur $\mathcal{F}_\pi[2-N]$ de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents vers la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents est exact.*

Démonstration. L'assertion est locale sur la base X. On peut donc supposer que l'on est sur un ouvert W sur lequel le fibré vectoriel E est trivial. Dans ce cas, l'énoncé résulte du théorème de comparaison avec la transformation de Fourier formelle, du fait que les foncteurs q_{1*} et q_{2*} sont exacts et définissent une équivalence de catégories, et du fait que l'application F_π est un isomorphisme.

Outre les résultats de Baldassarri-Berthelot, une importante application de ce résultat est la préservation de l'holonomie par la transformation de Fourier. Pour faire cela, nous allons montrer que le théorème de comparaison avec la transformation de Fourier formelle commute à la dualité. Ceci se traduit par l'énoncé suivant

Proposition 5.3.4. *Supposons que le fibré E soit trivial.*

i Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, alors il existe un isomorphisme canonique de $q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents

$$F^*_{\pi,d} q_{1*}\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M, \mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq q_{2*}\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{F}_\pi(M)[2-N], \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

ii Soit $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, alors il existe un isomorphisme canonique dans $D^b_{coh}(q_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)))$

$$F^*_{\pi,d} q_{1*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M, \mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq q_{2*}R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{F}_\pi(M)[2-N], \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Démonstration. La démonstration est formelle à partir des énoncés 2.4.1 et 5.1.3.1. On montre seulement (i). Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. Alors on a la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
& q_{2*}\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{F}_\pi(M)[2-N], \mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \\
& \simeq \mathcal{E}xt^i_{q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(q_{2*}\mathcal{F}_\pi(M)[2-N], q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \\
& \simeq \mathcal{E}xt^i_{q_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{Y^\vee/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(F^*_\pi(q_{1*}M), F^*_\pi(q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))) \\
& \simeq F^*_{\pi,d}\mathcal{E}xt^i_{q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(q_{1*}M, q_{1*}\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \\
& \simeq F^*_{\pi,d} q_{1*}\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M, \mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)).
\end{aligned}$$

Le corollaire est la préservation de l'holonomie par transformation de Fourier pour un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module holonome. L'énoncé est le suivant.

Proposition 5.3.5. *Soit M un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module holonome, alors $\mathcal{F}(M)[2-N]$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module holonome.*

Démonstration. On a déjà remarqué que la transformation de Fourier préserve la structure de Frobenius et la cohérence. La démonstration utilise ensuite la caractérisation des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules holonomes de Virrion, qu'on trouve dans [Vir00]. Le module M est holonome sur $T = Y\backslash\infty$ si et seulement si

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{T/S,\mathbf{Q}}}(M, \mathcal{D}^{\dagger}_{U,\mathbf{Q}}(\infty)) = 0 \text{ si } i \neq N+r.$$

Comme les faisceaux $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ sont des $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents, cela est équivalent par fidèle platitude de $\mathcal{D}^{\dagger}_{T/S,\mathbf{Q}}$ sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ au fait que les faisceaux $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(M, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ sont nuls sauf pour $i = N+r$. D'après l'énoncé précédent on voit que la condition d'holonomie de M entraîne que les faisceaux $q_{2*}\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{F}_{\pi}(M)[2-N], \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty))$ sont nuls sauf pour $i = N+r$ et donc aussi les faisceaux de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{F}_{\pi}(M)[2-N], \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty))$.

6. Premiers exemples

L'exemple le plus important est donné par Baldassarri-Berthelot (cf 2.10 de [BB03] du présent volume) et concerne le transformé de Fourier du faisceau constant $\mathcal{O}^{\dagger}_{Y,\mathbf{Q}}$. Notons ici que les conventions de décalage adoptées par Baldassarri-Berthelot pour la transformation de Fourrier ne sont pas les mêmes que les notres, ce qui explique qu'il n'y a pas de décalage par $2-N$ dans leur énoncé.

6.1. Transformé de Fourier du faisceau constant.

Avec nos notations, identifions X à son image dans $Y^{\vee}$ par la section nulle et notons $U = Y^{\vee}\backslash(\infty \bigcup X)$. La cohomologie locale surconvergente à support dans X_0 d'un isocristal surconvergent E sur $Y^{\vee}$ le long de ∞ est donné par

$$R\underline{\Gamma}^{\dagger}_{X_0}(E) = Rsp_{*}(E \to j^{\dagger}_{U_0}(E)).$$

Dans le cas où $E = \mathcal{O}^{\dagger}_{Y^{\vee},\mathbf{Q}}$, on note les faisceaux de cohomologie locale à support dans X_0 $\mathcal{H}^{\dagger i}_{X_0}(\mathcal{O}^{\dagger}_{Y^{\vee},\mathbf{Q}})$.

Théorème 6.2. *(Baldassarri-Berthelot) Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche compatible au Frobenius*

$$\mathcal{F}_{\pi}(\mathcal{O}^{\dagger}_{Y,\mathbf{Q}})[2-N] \simeq \mathcal{H}^{\dagger N}_{X_0}(\mathcal{O}^{\dagger}_{Y^{\vee},\mathbf{Q}}).$$

Nous donnons quelques autres exemples. Ces exemples sont calculés grâce au théorème de comparaison avec la transformation de Fourier formelle. Nous n'avons pas vérifié la compatibilité à Frobenius pour ces énoncés.

6.3. Transformé de Fourier de l'isocristal de Dwork.

Soit $Y = \widehat{\mathbf{P}}^1_V$ la droite projective formelle, muni du diviseur à l'infini, $T = \widehat{\mathbf{A}}^1_V$ l'ouvert complémentaire, muni de la coordonnée x. On suppose que le corps résiduel k contient les racines $p-1$-ième de l'unité. Soit $\pi' \in K$ tel que $\pi'^{p-1} = -p$ et $-\zeta'$ la racine $p-1$-ième de l'unité telle que $\pi' = -\zeta'\pi$. On note $-\zeta$ la classe de $-\zeta'$ dans le corps résiduel k. Si $p = 2$, $\zeta = 1$ et si p est impair ζ est une racine $p-1$-ième de l'unité. Sur l'espace projectif rigide $\mathbf{P}^1_K$, on considère le F-isocristal de Dwork associé à π', $L_{\pi'}$ et son image directe par spécialisation sur la droite projective formelle noté sp_*L_{π}.

Proposition 6.3.1. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{F}_{\pi}(sp_*L_{\pi'})[1] \simeq \mathcal{H}^{\dagger 1}_{\zeta}(\mathcal{O}^{\dagger}_{Y,\mathbf{Q}}).$$

Démonstration. Le module sp_*L_{π} est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent (cf [Ber90]), dont Berthelot donne une résolution sur T (et sur $Y\backslash\{0\}$)

$$0 \to \mathcal{D}^{\dagger}_{T/S,\mathbf{Q}} \overset{\partial+\pi'}{\to} \mathcal{D}^{\dagger}_{T/S,\mathbf{Q}} \to sp_*L_{\pi'} \to 0,$$

où la dernière flèche est donnée par $P \mapsto P.1$. On a déjà vu que $\partial \in \Gamma(Y, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}})$, si bien que la suite qui suit est un complexe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents

$$0 \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \overset{\partial+\pi'}{\to} \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \to sp_*L_{\pi'} \to 0,$$

qui est exact sur T, donc exact sur Y. On obtient ainsi une résolution de $sp_*L_{\pi'}$ sur Y. En passant aux sections globales et en notant $A = \Gamma(Y, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)) = A^{1\dagger}_K$, on obtient la résolution suivante

$$0 \to A \overset{\partial+\pi'}{\to} A \to Dw_{\pi'} \to 0,$$

où par définition, $Dw_{\pi} = \Gamma(Y, sp_*L_{\pi})$ est égal à l'algèbre

$$C = \left\{ \sum_l a_l x^l \mid a_l \in K \text{ et } \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que} |a_l| < C\eta^l \right\}.$$

L'image inverse par F^*_{π} de cette résolution est la résolution suivante

$$0 \to A \overset{\pi x+\pi'}{\to} A \to F^*_{\pi} Dw_{\pi'} \to 0,$$

de sorte que $F_\pi^* Dw_{\pi'}$ admet la résolution suivante

$$0 \to A \overset{x-\zeta'}{\to} A \to F_\pi^* Dw_{\pi'} \to 0,$$

d'où une présentation de $\mathcal{F}_\pi(sp_* L_{\pi'})[1]$ comme $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche. On voit alors par la proposition 2.9 de [BB03] (ou par un calcul direct) que $F_\pi^* Dw_{\pi'}[1]$ est isomorphe au groupe de cohomologie à support $\mathcal{H}^\dagger_\zeta(\mathcal{O}^{\dagger 1}_{Y,\mathbf{Q}})$.

6.4. Transformé de Fourier de l'isocristal de Tate.

Soit $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ un entier non Liouville, t une coordonnée homogène sur la droite projective formelle $Y = \widehat{\mathbf{P}}^1_V$, ∂ la dérivation par rapport à t, $T'_0 = \mathbf{P}^1_k \backslash \{0, \infty\}$, v l'inclusion $T'_0 \subset Y_0$, $T = Y \backslash \{\infty\}$. On note $\mathcal{K}_\alpha$ l'isocristal surconvergent sur T'_0 le long de $\{0, \infty\}$ dont une réalisation sur $\mathbf{P}^{1,an}_K$ est donnée par $v^\dagger \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{1,an}_K}$ muni de la connexion

$$\nabla(1) = at^{-1} dt.$$

On s'intéresse ici à $v^\dagger_* \mathcal{K}_\alpha = sp_* v^\dagger \mathcal{K}_\alpha$. Avec l'hypothèse que α est non Liouville, c'est un résultat dû à Laumon que le $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}$-module $v^\dagger_* \mathcal{K}_\alpha$ est cohérent. Le lemme suivant permet de voir que ce module est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent.

Lemme 6.4.1. *Soit M un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module qui est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}$-module cohérent, alors M est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent.*

Démonstration. Il suffit de voir que l'on a un isomorphisme

$$\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}} M \overset{\varphi}{\simeq} M,$$

via l'application $\varphi : P \otimes m \mapsto P.m$. Le module

$$N = \mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}} M$$

est un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$ cohérent. Il faut vérifier que φ est injectif. Soient $P_1, \ldots, P_t$ des éléments de $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$, $m_1, \ldots, m_t$ des éléments de M, et $s = 1 \otimes \sum_i P_i m_i - \sum_i P_i \otimes m_i \in N$. Le module $L = \mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty).s \subset N$ est un sous-module de type fini d'un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent et est donc un $\mathcal{D}^\dagger_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. Or, en restriction à l'ouvert complémentaire du diviseur ∞, ce module est nul, si bien qu'il est nul. Cela montre l'identité $1 \otimes \sum_i P_i m_i = \sum_i P_i \otimes m_i$ et le fait que φ est injectif.

Une présentation sur $T = \widehat{\mathbf{A}}^1_V$ est donnée par (cf 5.1 de [Ber90])

$$0 \to \mathcal{D}^\dagger_{T/S,\mathbf{Q}} \overset{.(t\partial - \alpha)}{\longrightarrow} \mathcal{D}^\dagger_{T/S,\mathbf{Q}}(\infty) \overset{\varphi}{\to} v^\dagger_* \mathcal{K}_{\alpha|T} \to 0,$$

où φ est l'évaluation $\varphi(P) = P.1$ Du fait que $t\partial - \alpha \in \Gamma(Y, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty))$, cette suite donne alors une résolution de $v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{\alpha}$ comme $\mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty)$-module

$$0 \to \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \xrightarrow{.(t\partial-\alpha)} \mathcal{D}^{\dagger}_{Y/S,\mathbf{Q}}(\infty) \xrightarrow{\varphi} v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{\alpha} \to 0.$$

Passons aux sections globales et appliquons F^{*}_{π}, nous obtenons une résolution de $\Gamma(Y^{\vee}, \mathcal{F}_{\pi} v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{\alpha})$

$$0 \to \Gamma(Y^{\vee}, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \xrightarrow{.(-\partial t-\alpha)} \Gamma(Y^{\vee}, \mathcal{D}^{\dagger}_{Y^{\vee}/S,\mathbf{Q}}(\infty)) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(Y^{\vee}, \mathcal{F}_{\pi}(v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{\alpha})[1]) \to 0.$$

La proposition est donc la suivante

Proposition 6.4.2. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{F}_{\pi}(v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{\alpha})[1] \simeq v^{\dagger}_{*}\mathcal{K}_{-\alpha-1}.$$

7. Considérations sur le cas algébrique.

Dans tout ce qui suit, R est un corps de caractéristique 0 et on considère des schémas lisses sur $S = \mathrm{specR}$. Nous expliquons dans ce cadre comment on peut démontrer algébriquement le théorème de comparaison entre la transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules et la transformation de Fourier formelle. Dans ce cas en effet, nous n'avons pas pu trouver de démonstration de ce théorème de comparaison en dimension N. Dans [KL85] par exemple, le théorème de comparaison est démontré dans le cas d'un fibré vectoriel trivial de rang 1. Ce théorème de comparaison entraîne la préservation de l'holonomie comme dans le cas précédemment traité.

Comme le formalisme dans le cadre algébrique est plus simple que dans le cas p-adique, nous ne détaillerons pas tous les points techniques de la démonstration et nous nous concentrerons sur le coeur de la démonstration qui est l'analogue du thèorème de division 4.3.4.1. On remarquera tout de même que dans le cas algébrique, il n'est pas nécessaire de se restreindre aux $\mathcal{D}$-modules cohérents pour le théorème de comparaison, mais qu'on peut considérer les faisceaux de $\mathcal{D}$-modules, qui sont des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules quasi-cohérents.

Soit Y un S-schéma lisse, $\mu(\mathcal{D}_Y)$ la catégories des $\mathcal{D}_Y$-modules, qui sont des $\mathcal{O}_Y$-modules quasi-cohérents. On note $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules dont les modules de cohomologie sont bornés et éléments de $\mu(\mathcal{D}_Y)$, et $D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules à cohomologie bornée et cohérente. Si Y est affine, on rappelle l'équivalence de catégories suivante.

Théorème 7.1. *Le foncteur $\Gamma(Y, .)$ établit une équivalence de catégories de $\mu(\mathcal{D}_Y)$ vers la catégorie des $\Gamma(Y, \mathcal{D}_Y)$-modules. Un foncteur quasi-inverse est le foncteur $\mathcal{D}_Y \otimes_{\Gamma(Y,\mathcal{D}_Y)} \cdot$.*

Démonstration. Ce théorème se déduit par exemple de 3.1.3 de [Ber96b], et du fait que sur un schéma Y, un $\mathcal{D}_Y$-module qui est $\mathcal{O}_Y$-quasi-cohérent est limite inductive de $\mathcal{D}_Y$-modules cohérents.

Soient X un schéma lisse sur S, et E un fibré vectoriel sur X. On suppose à partir de maintenant que $Y = \mathbf{V}(E)$ (resp. $Y^\vee$) est le fibré vectoriel associé (resp. le fibré vectoriel dual associé) à E. On note q_1 la projection canonique $Y \to X$ (resp. q_2 la projection canonique $Y^\vee \to X$). Notons $Z = Y \times_X Y^\vee$ et p_1, p_2 les projections sur Y et $Y^\vee$. Si X est muni de coordonnées locales $w_1, \dots, w_r$ sur un ouvert W et si $E_{|W}$ est trivial de base $x_1, \dots, x_N$, on rappelle que le module des sections des opérateurs différentiels est une algèbre de Weyl

$$\Gamma(q_1^{-1}W, \mathcal{D}_{Y/R}) = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k} \in \mathbf{N}^N, \underline{k}' \in \mathbf{N}^r} a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{\underline{k}'} \underline{\partial}^{\underline{k}} \mid a_{\underline{l},\underline{k}',\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(W) \right\}.$$

Introduisons la droite affine $\mathbf{A}^1_S$, t une coordonnée sur cette droite affine, le $\mathcal{D}_{\mathbf{A}^1_S}$-module exponentiel sur cette droite défini par la connexion $\nabla(1) = -dt$ et δ l'accouplement de dualité $Y \times Y^\vee \to \mathbf{A}^1_S$. En suivant les conventions de décalage de [KL85], on pose $K = \delta^* L[2-2N]$ et pour M et N deux $\mathcal{O}_Z$-modules, on pose

$$M \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} N = M \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_Z} N \quad [-2N].$$

On définit alors la transformation de Fourier de la façon suivante

Définition 7.1.1. *Soit M un complexe de $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$, on pose*

$$\mathcal{F}(M) = p_{2+}\left(p_1^!(M) \tilde{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} K\right).$$

Observons tout de suite que le foncteur $\mathcal{F}$ commute aux limites inductives filtrantes.

L'énoncé que l'on veut préciser est le suivant.

Théorème 7.2. *i Soit M un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent (resp. un élément de $\mu(\mathcal{D}_Y)$), alors $\mathcal{F}(M)$ est un $\mathcal{D}_{Y^\vee}$-module cohérent (resp. un élément de $\mu(\mathcal{D}_{Y^\vee})$) concentré en degré $2-N$.*

ii Si $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ (resp. $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$), alors $\mathcal{F}(M) \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_{Y^\vee})$ (resp. $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y^\vee)$).

iii Si $M \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ (resp. $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_Y)$), et si le fibré vectoriel E est trivial, il existe un isomorphisme ne dépendant que du choix d'une trivialisation de E

$$F^*\Gamma(Y, M)[N-2] \simeq \Gamma(Y^\vee, \mathcal{F}(M)).$$

Commençons par quelques remarques :

i Comme les foncteurs considérés commutent aux limites inductives filtrantes, on est ramené à montrer cet énoncé dans le cas où M est cohérent (ou dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$).

ii Les énoncés sont locaux sur la base X, ce qui nous permet de supposer que le fibré vectoriel E est trivial, de base $x_1, \dots, x_N$ et de base duale $y_1, \dots, y_N$

et que X est muni de coordonnées globales $w_1, \ldots, w_r$. Les dérivations sur Z relatives à Y seront notées ∂_{x_i} pour $1 \leq i \leq N$, celles relatives à $Y^\vee$, ∂_{y_j} pour $1 \leq j \leq N$, et les dérivations sur X/S seront notées ∂_{w_l} pour $1 \leq l \leq r$. Le (i) se déduit alors de (ii) comme en 5.3. D'autre part, un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent admet une résolution finie par des modules projectifs de rang fini, de sorte que l'on est ramené à montrer (ii) dans le cas où $M = \mathcal{D}_Y$.

Le calcul de $\mathcal{F}(\mathcal{D}_Y)$ s'effectue alors comme en 4 et on voit que le complexe $\mathcal{F}(\mathcal{D}_Y)$ est quasi-isomorphe au complexe $L_\bullet$ décrit comme suit. Les termes de ce complexe sont numérotés de N à 0 de façon décroissante. Le terme général de ce complexe est

$$L_n = p_{2*}(\mathcal{D}_{Y^\vee \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Lambda^n \mathcal{T}_{Z/Y})$$

et la différentielle est donnée par

$$d_n(P \otimes \partial_{y_i} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}}) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} P * (\partial_{y_{i_l}} + x_{i_l}) \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \widehat{\partial_{y_{i_l}}} \wedge \ldots \partial_{y_{i_n}}.$$

On rappelle que la notation $*$ signifie que la multiplication à droite par $\partial_{y_{i_l}} + x_{i_l}$ est obtenue par transposition. Si W' est un ouvert affine de $Y^\vee$, on a la description suivante

$$\Gamma(W', p_{2*}(\mathcal{D}_{Y^\vee \leftarrow Z})) = \left\{ \sum_{\underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} b_{\underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_w^{\underline{k}'} \underline{\partial}_y^{\underline{k}} \,|\, b_{\underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} \in \Gamma(W', \mathcal{O}_{Y^\vee}) \right\}.$$

En particulier, si $W' = Y^\vee$, on trouve

$$\Gamma(Y^\vee, p_{2*}(\mathcal{D}_{Y^\vee \leftarrow Z})) = \left\{ \sum_{\underline{l}', \underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} c_{\underline{l}', \underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{y}^{\underline{l}'} \underline{\partial}_w^{\underline{k}'} \underline{\partial}_y^{\underline{k}} \,|\, c_{\underline{l}', \underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} \in R \right\}.$$

Dans la suite, on fixe un ouvert W' quelconque et on note $A = \Gamma(W', p_{2*}(\mathcal{D}_{Y^\vee \leftarrow Z}))$.

L'analogue du lemme de division 4.3.4.1 est tout à fait facile à montrer dans ce cas et donne l'énoncé suivant. On définit

$$A_i = \{P \in A \mid b_{\underline{l}, \underline{k}', \underline{k}} = 0 \ si\ k_i \neq 0\}.$$

Cette algèbre est une sous-algèbre de A (et un sous $\Gamma(W', \mathcal{D}_{Y^\vee})$-module).

Lemme 7.3. *Il existe des applications $\Gamma(W', \mathcal{D}_{Y^\vee})$-linéaires à gauche $\varphi_i : A \to A$ et $\psi_i : A \to A_i$ tels que, pour tout $P \in A$, $P = \varphi_i(P) * (\partial_{y_i} + x_i) + \psi_i(P)$. D'autre part, on a la relation, si $i \neq k$, $\varphi_i(P * (\partial_{y_k} + x_k)) = \varphi_i(P) * (\partial_{y_k} + x_k)$.*

Il suffit alors de recopier la démonstration de 4.3.5 pour voir que le complexe $L_\bullet$ est acyclique et que la cohomologie en degré zéro de ce complexe, qui est égale à $\mathcal{F}(\mathcal{D}_Y)[2-N]$, est isomorphe à $\mathcal{D}_{Y^\vee}$. Ces constatations achèvent de démontrer le théorème.

Une conséquence importante de ce résultat est la préservation de l'holonomie. La même démonstration qu'en 5.3.5 donne le fait suivant.

Proposition 7.4. *Soit M un $\mathcal{D}_Y$-module holonome. Alors $\mathcal{F}(M)[2-N]$ est un $\mathcal{D}_{Y^\vee}$-module holonome.*

Références

[BB03] F. Baldassarri and P. Berthelot. *On Dwork cohomology for singular hypersurfaces.* Dwork Conference Volume , 2003.

[Ber90] P. Berthelot. *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules.* Proc. Conf. *p-adic Analysis (Trento 1989),* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1454**, p. 78–124, 1990.

[Ber96a] P. Berthelot. *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres.* Preprint de l'IRMAR, 1996.

[Ber96b] P. Berthelot. *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} série, **t. 29**, p.185–272, 1996.

[Ber00] P. Berthelot. *D-modules arithmétiques II descente par Frobenius.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire **81**, p. 1–135, 2000.

[Ber03] P. Berthelot. *$\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents III. Images directes et réciproques.* En cours de rédaction, 2003.

[EGA2] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.* Publ. Math. I.H.E.S., **8**, 1961.

[Huy95a] C. Huyghe. *Construction et étude de la Transformation de Fourier pour les D-modules arithmétiques.* Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1995.

[Huy95b] C. Huyghe. *$D^\dagger$-affinité des schémas projectifs.* Ann. Inst. Fourier, **t. 48**, fascicule 4, p. 913–956, 1995.

[Huy95c] C. Huyghe. *Interprétation géométrique sur l'espace projectif des $A_N(K)^\dagger$-modules cohérents.* C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 321**, Série I, p. 587–590, 1995.

[Huy97] C. Huyghe. *$\mathcal{D}^\dagger$-affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot.* Compositio Mathematica, **108**, No. 3, p. 277–318, 1997.

[Huy98] C. Huyghe. *$\mathcal{D}^\dagger(\infty)$-affinité des schémas projectifs.* Ann. Inst. Fourier, **48**, No. 4, p. 913–956, 1998.

[Huy01] C. Huyghe. Finitude de la dimension cohomologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes. Preprint de l'IRMAR, novembre 2001.

[KL85] N. Katz and G. Laumon. *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles.* Publ. Math. I.H.E.S., **62**, p. 361–418, 1985.

[MNM90] Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro. *Sur les coefficients de de Rham - Grothendieck des variétés algébriques.* Proc. Conf. *p-adic Analysis (Trento 1989),* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1454**, p. 267–308, 1990.

[NH03] C. Noot-Huyghe. *Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques II.* En préparation, 2003.

[Vir00] A. Virrion. *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques.* Bull. Soc. Math. France, **t. 321**, p. 101–168, 2000.

Christine Noot-Huyghe
UFR de mathématiques
Université de Rennes 1
campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
mél huyghe@univ-rennes1.fr, http ://www.maths.univ-rennes1.fr/˜huyghe