Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narvaez-Macarro.

C. NOOT-HUYGHE*

11 février 2000

Table des matières

*Pendant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (Contrat ERBFMRXCT 960006)

Introduction.

Soient V un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0{,}p)$, π une uniformisante de V, K son corps des fractions et k son corps résiduel. Soit X un schéma lisse sur speck et Z un diviseur de Cartier ample sur X. On note U l'ouvert complémentaire (affine) du diviseur. Supposons donné un relèvement faiblement formel lisse (au sens des schémas faiblement formels de Meredith), $X^\dagger$, de X sur Spf$V$, tel que le faisceau inversible $\mathcal{L}(Z)$ se relève en un faisceau ample sur $X^\dagger$. Notons $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$ les schémas obtenus en complétant p-adiquement les schémas faiblement formels précédents. On se propose de montrer qu'il existe une équivalence de catégories naturelle entre, d'une part, la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}$-modules cohérents, définie par Mebkhout et Narvaez-Macarro et la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$- modules cohérents, où $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ est le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients surconvergents le long du diviseur Z, construit par Berthelot.

L'intérêt d'avoir une telle comparaison est double : cela permet de faciliter les calculs de sections globales concernant les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents. Cela renforce d'autre part l'idée que cette catégorie de coefficients dépend essentiellement de l'ouvert U et non de la compactification. D'autre part, l'on dispose d'un formalisme pour les faisceaux d'opérateurs différentiels développés par Berthelot, qui n'existe pas toujours pour le point de vue de Mebkhout-Narvaez-Macarro, comme la définition de la variété caractéristique d'un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module, ou le théorème de bidualité ([11]).

L'idée de ce résultat est la conséquence d'une remarque du referee concernant un article précédent et fait l'objet d'une question (6 de [5]). Notre démonstration de l'équivalence de catégories repose sur des théorèmes de type A et B pour les deux catégories de coefficients considérées : ces théorèmes sont établis dans un travail en cours de Mebkhout et Narvaez-Macarro ([8]) d'une part, et dans [5] pour le cas du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$.

Le plan de la démonstration est le suivant. Nous commençons par quelques considérations concernant la complétion faible des algèbres dans le cas non commutatif. Les énoncés importants sont des énoncés de finitude de la complétion faible. Nous donnons ensuite des homomorphismes de comparaison de tous les faisceaux intervenant. Puis nous montrons une équivalence de catégories dans notre cas entre les faisceaux de coefficients, i.e. entre les $\mathcal{O}_{U^\dagger,\mathbf{Q}}$-

modules cohérents et entre les $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-modules cohérents. Ensuite, nous démontrons le théorème de comparaison pour les modules cohérents sur les deux faisceaux d'opérateurs différentiels considérés. Dans les deux cas, l'équivalence de catégories repose sur le fait que les sections globales des deux faisceaux à comparer sont les mêmes, sur $U^\dagger$ d'une part et sur $\mathcal{X}$ d'autre part. Le fait que les théorèmes A et B soient vrais est donc essentiel. De toute façon, les deux catégories de faisceaux ne sont pas équivalentes localement (les sections, sur les ouverts affines, des faisceaux de coefficients étant différentes). Pour calculer les sections globales du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$, nous utilisons, en la raffinant, une construction faite dans [5]. Sur une extension infiniment ramifiée de V, nous construisons un système inductif de faisceaux d'opérateurs différentiels, dont la limite inductive est isomorphe à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$ tensorisé par un anneau fidèlement plat sur V, et dont nous contrôlons à la fois la cohomologie et les sections globales. Pour ces faisceaux, les foncteurs passage à la complétion faible et passage aux sections globales commutent.

Je remercie P. Berthelot et L. Moret-Bailly pour d'utiles remarques lors d'un exposé sur ce travail, ainsi que Luis Narvaez-Macarro pour avoir répondu à mes questions concernant les résultats de [8].

1 Généralités sur la complétion faible.

Dans la suite de cet article, les abbréviations f. formel et f. complet remplaceront faiblement formel et faiblement complet.

1.1 Notations.

Si x est un nombre réel, $[x]$ est la partie entière de x et $[x]'$ est le plus petit entier $\geq x$.

Soit A un anneau (unitaire) et $X_1,\ldots,X_n$ n éléments de A. On convient que pour $X \in A$, $X^0 = 1$. Soit $\underline{j} \in (\mathbf{N})^{(\mathbf{N}^*)}$, un multi-indice d'éléments de $\mathbf{N}$ tels que $j_r = 0$ pour r assez grand. Un multi-indice de longueur n sera considéré comme un multi-indice de longueur arbitraire en complétant ses composantes par des 0.

On définit

$$|\underline{j}| = \sum_{k\in\mathbf{N}^*} j_k,\, l(\underline{j}) = min\,\{r \mid \forall s \geq r\; j_s = 0\}\,.$$

Si $\underline{j}$ est un multi-indice et si $l(\underline{j}) = an + b$ avec $1 \leq b \leq n$, on pose

$$\underline{X}^{\underline{j}} = X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_n^{j_n} X_1^{j_{n+1}} \cdots X_n^{j_{2n}} X_1^{j_{2n+1}} \cdots X_b^{j_{an+b}}.$$

Si A est commutatif, on se restreindra à des multi-indices de longueur n.

Si $\underline{i}$ et $\underline{j}$ sont deux multi-indices, $\underline{i} \cup \underline{j}$ est le multi-indice $\underline{k}$ de longueur $l(\underline{i}) + l(\underline{j})$ défini par $k_n = i_n$ si $n \leq l(\underline{i})$ et $k_n = j_{n-l(\underline{i})}$ si $l(\underline{i}) + 1 \leq n \leq l(\underline{i}) + l(\underline{j})$. En d'autres termes, on a l'égalité $\underline{X}^{\underline{i}\cup\underline{j}} = \underline{X}^{\underline{i}}\underline{X}^{\underline{j}}$. D'autre part, on définit

$$\underline{i}\cdot\underline{j} = \sum_{1\leq k\leq n} (\sum_{l\in\mathbf{N}} i_{k+ln})(\sum_{l\in\mathbf{N}} j_{k+ln}) \quad \text{et} \quad \underline{i}\cdot\underline{j} = \sum_{1\leq k\leq n} i_k(\sum_{l\in\mathbf{N}} j_{k+ln})\,\text{si}\, l(\underline{i}) \leq n$$

Si k est un entier, le multi-indice 1_k est le multi-indice dont tous les termes sont nuls sauf le k-ième qui est égal à 1.

Deux multi-indices $\underline{j}$ et $\underline{j}'$ de longueur arbitraire sont équivalents si (noté $\underline{j} \equiv \underline{j}'$) si

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \sum_l j_{k+ln} = \sum_l j'_{k+ln}.$$

1.2 Algèbres faiblement complètes.

Nous rappelons les définitions usuelles de la complétion faible, données par Monsky-Washnitzer dans le cas commutatif. Nous n'avons pas trouvé le cas non commutatif dans la littérature, aussi donnons-nous quelques définitions qui s'appliqueront au cas particulier des algèbres d'opérateurs différentiels. Nous construisons ensuite une sous-algèbre de l'algèbre complétée faible qui en diffère à torsion finie près, et qui est limite inductive d'algèbres π-adiquement complètes.

Soient V un anneau de valuation discrète comme dans les notations du début de l'article, R une V-algèbre complète pour la topologie π-adique, noethérienne, ξ une puissance de π, A une R-algèbre, et $\widehat{A}$ la complétée π-adique de A.

Définition 1.2.1 *On note $A^\dagger$ la sous-algèbre des éléments z de $\widehat{A}$ pour lesquels il existe $x_1,\dots,x_n \in A$, des polynômes $p_j \in \xi^j R[X_1,\dots,X_n]$ pour tout $j \in \mathbf{N}$, et une constante $c > 0$ tels que $\forall j \in \mathbf{N}$, $deg\, p_j \leq c(j+1)$ et tels que*

$$z = \sum_{j\in\mathbf{N}} p_j(x_1,\dots,x_n).$$

Une autre description consiste à dire que $z \in \widehat{A}$ est dans $A^\dagger$ si et seulement si il existe un n-uplet d'éléments $(x_1,\dots,x_n)$, une constante $c > 0$, et des éléments $a_{\underline{l}} \in R$ tels que

$$z = \sum a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \text{ et } \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \frac{|\underline{l}|}{c} - 1.$$

L'algèbre $A^\dagger$ ne dépend pas du choix de ξ. Une R-algèbre A est dite faiblement complète si l'homomorphisme canonique de A dans $A^\dagger$ est un isomorphisme. En particulier, une algèbre f.complète est séparée pour la topologie π-adique. Une R-algèbre π-adiquement complète est en particulier f. complète.

La complétion faible est une opération fonctorielle (cf 1.5 de [10]). Il est de plus facile de voir que la complétion faible ne commute pas aux changements de base.

La complétion faible se comporte très bien par passage à la limite inductive. Il est facile de vérifier l'énoncé suivant.

Remarque. Soit I un ensemble ordonné filtrant, A_i une famille inductive de R-algèbres, indexée par I, A l'algèbre limite inductive des A_i. Soit $B_i^\dagger = Im(A_i^\dagger \to \widehat{A})$. Les $B_i^\dagger$ forment un système inductif filtrant et on a un isomorphisme canonique

$$A^\dagger \simeq \varinjlim_{i\in I} B_i^\dagger.$$

Comme conséquence de cette remarque, on obtient qu'une R-algèbre séparée qui est limite inductive de R-algèbres π-adiquement complètes et séparées, est f. complète.

1.2.2 Description de l'algèbre $\tilde{A}$ dans le cas commutatif.

Nous allons introduire une sous-algèbre de $A^\dagger$, f. complète, notée $\tilde{A}$, ne contenant pas A comme sous-algèbre mais différent de $A^\dagger$ à ξ-près. L'avantage de cette algèbre $\tilde{A}$ est qu'elle pourra s'écrire comme limite inductive d'algèbres noethériennes, π-adiquement complètes et séparées. Soient $m \in \mathbf{N}$ et $x_1, \ldots, x_n$ un nombre fini d'éléments de A. On note $A_{\underline{x},m}$ la sous-R-algèbre des éléments de A qui s'écrivent

$$z = \sum_{finie} p_j(x_1, \ldots, x_n),$$

où $\forall j \in \mathbf{N}$, $p_j \in \xi^j R[X_1, \ldots, X_n]$ et $deg\, p_j \leq mj$. Pour m variable et $(x_1, \ldots, x_n)$ variables, ces algèbres forment un système inductif.

Fixons $\underline{x}$ et notons $A_m = A_{\underline{x},m}$. Cette algèbre est une R-algèbre de type fini engendrée par $\{p_j(\underline{x}), | deg\, p_j \leq m \text{ et } p_j \in \xi R[\underline{X}]\}$. Cette algèbre A_m est un quotient d'une algèbre $R[S_1, \ldots, S_r]$ pour un certain entier r. Par exactitude de la complétion dans le cas noethérien, l'algèbre séparée complétée $\widehat{A}_m$ de A_m est un quotient de l'algèbre complète $R\{S_1, \ldots, S_r\}$. Notons $\widehat{B}_{\underline{x},m} = Im(\widehat{A}_m \to \widehat{A})$. Cette algèbre est π-adiquement complète car c'est une algèbre finie sur une algèbre noethérienne complète. Précisément, l'algèbre $\widehat{B}_{\underline{x},m}$ est la sous-algèbre de $\widehat{A}$ formée des éléments

$$z = \sum_{infinie} a_j p_j(x_1, \ldots, x_n),$$

où $\forall j \in \mathbf{N}$, $p_j \in \xi^j R[X_1, \ldots, X_n]$, $a_j \in V$, $deg\, p_j \leq mj$ et $\mathrm{v}_\pi(a_j) \to \infty$ si $j \to \infty$. De façon équivalente, un élément z de $\widehat{A}$ est dans $\widehat{B}_{\underline{x},m}$ si et seulement si il existe des éléments $a_{\underline{l}} \in R$ tels que

$$z = \sum a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \text{ et } \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \frac{|\underline{l}|}{m} \text{ et } \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) - \frac{|\underline{l}|}{m} \to \infty \text{ si } |\underline{l}| \to \infty.$$

Définition 1.2.2.1 *On pose*

$$\tilde{A} = \lim_{\longrightarrow \underline{x},m} \widehat{B}_{\underline{x},m}.$$

Cette R-algèbre dépend de ξ est une sous-algèbre de $A^\dagger$, qui est f. complète comme limite inductive de R-algèbres complètes. Soit α l'application canonique de A dans $A^\dagger$.

Proposition 1.2.2.2 *On a les assertions suivantes.*

i $\xi A^\dagger \subset \tilde{A} \subset A^\dagger$,

ii $\alpha(A) + \tilde{A} = A^\dagger$

Démontrons la première inclusion. Soit z un élément de $A^\dagger$. Cet élément s'écrit $z = \sum p_j(\underline{x})$, pour un n-uplet $(\underline{x})$. Les polynômes p_j sont dans $\xi^j R[\underline{X}]$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ et $degp_j \leq c(j+1)$. Pour $j \geq 1$, on pose $r_j = \xi p_{j-1}$ et $r_0 = 0$. Soit m un entier $\geq c$. Alors il est clair que $\xi z = \sum_j r_j(\underline{x})$. De plus, si $j \geq 1$, $r_j \in \xi^j R[\underline{X}]$, et $deg\, r_j \leq mj$, de sorte que $z \in \widehat{B}_{\underline{x},m}$.

Montrons l'égalité du (ii). Soit $z \in A^\dagger$ tel que z s'écrive $z = \sum_j p_j(\underline{x})$, avec $p_j \in \xi^j[\underline{X}]$ et $deg\, p_j \leq c(j+1)$. Considérons un entier $m \geq 2c$, alors z s'écrit aussi $z = p_0(\underline{x}) + \sum_{j \geq 1} p_j(\underline{x})$, où $\forall j \geq 1$, $deg\, p_j \leq mj$. Ainsi z est un élément de $\alpha(A) + \widehat{B}_{\underline{x},m}$, d'où l'assertion.

Nous nous intéressons maintenant au cas non commutatif.

1.3 Complétion faible dans le cas non commutatif.

La définition que nous donnons de la complétion faible dans le cas non commutatif est la même que dans le cas commutatif. Le problème est alors que l'on n'obtient pas une algèbre en général, mais seulement un sous R-module de l'algèbre complétée. Dans les exemples que nous traiterons ici, les complétions faibles que nous construirons seront des algèbres.

Pour les multi-indices, nous reprenons les notations de 1.1. Soit B_n l'algèbre des polynômes à n indéterminées, non commutative (i.e. la R-algèbre de groupe du groupe libre de rang n). En particulier, les éléments de R commutent aux indéterminées. De ce fait, si $x_1, \ldots ,x_n$ sont des éléments de A, l'application d'évaluation $p \in B \mapsto p(x_1, \ldots ,x_n)$ n'est pas un homomorphisme d'algèbres, mais cela ne sera d'aucune importance ici. L'algèbre B_n est naturellement graduée par

$$deg \sum_{\underline{i} \in K} a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}} = \max\{|\underline{i}| \mid \underline{i} \in K\},$$

où K est un ensemble fini de multi-indices. On peut alors recopier la définition donnée par Monsky et Washnitzer.

Définition. Soit A une R-algèbre, on note $A^\dagger$ la sous-algèbre des éléments z de $\widehat{A}$ pour lesquels il existe $x_1, \ldots ,x_n \in A$, des polynômes $p_j \in \xi^j B_n$ pour tout $j \in \mathbf{N}$, et une constante $c > 0$ tels que $\forall j \in \mathbf{N}$, $deg\, p_j \leq c(j+1)$ et tels que

$$z = \sum_{j \in \mathbf{N}} p_j(x_1, \ldots ,x_n).$$

Dans ce cadre, toutes les remarques faites à l'issue de la définition de la complétion faible dans le cas commutatif restent valables.

On dit qu'une algèbre A est f. complète si l'application canonique de A dans $A^\dagger$ est un isomorphisme. Dans ce cas, elle est π-adiquement séparée. Il n'est pas clair que l'algèbre $A^\dagger$ soit f. complète, même si ce sera le cas dans les exemples que nous traiterons ici.

La propriété de fonctorialité se montre comme dans le cas commutatif.

Proposition 1.3.1 *Soient $\varphi : A \to B$, un homorphisme de R-algèbres, $A^\dagger$, $B^\dagger$, les complétions faibles de A et de B. Alors, il existe un unique homorphisme R-linéaire $\varphi^\dagger : A^\dagger \to B^\dagger$ qui est compatible avec φ.*

La démonstration est identique à la démonstration du théorème 1.5 de [10]. En fait, ce sont seulement les structures d'algèbres de $\widehat{A}$ et de $\widehat{B}$ qui interviennent. En particulier, on retrouve le fait que l'on a des isomorphismes pour tout $i \in \mathbf{N}$, $A/\pi^i A \simeq A^\dagger/\pi^i A^\dagger$.

Il est clair que la complétion faible ne dépend pas de la puissance de l'élément ξ choisi.

Remarques.

i S'il existe un ensemble ordonné filtrant I, des R-bimodules à gauche et à droite M_i, $i \in I$, qui sont des R-modules à gauche de type fini, tels que $A = \varinjlim_i M_i$, le R-module $A^\dagger$ est une R-algèbre. Soient en effet $x_1, \ldots ,x_r$ une famille finie d'éléments de A et α_i les applications canoniques de M_i dans A. Les éléments x_i sont dans $\alpha_i(M_i)$ pour un certain i. Complétons cette famille en une famille génératrice $x_1, \ldots ,x_n$ d'éléments de

$\alpha_i(M_i)$. On voit alors facilement par récurrence sur le degré que si $p(\underline{x})$ est un polynôme en les x_i, $1 \geq i \geq n$, et si $r \in R$, $p(\underline{x})r$ est un polynôme $q(\underline{x})$ de degré $\leq$ *degp*.

ii Si A est une R-algèbre séparée, qui est limite inductive de R-algèbres π-adiquement complètes séparées, A est f. complète.

Compatibilité aux changements de base finis. Soient V et V' deux anneaux de valuation discrète complets d'inégales caractéristiques (0,p), d'uniformisante π et π' respectivement, un homomorphisme d'anneaux locaux $V \to V'$, R une V-algèbre p-adiquement complète, S une V'-algèbre p-adiquement complète, et $R \to S$ un homomorphisme fini de V-algèbres, compatible à l'extension $V \to V'$, B une S-algèbre. On dispose alors de l'énoncé suivant.

Proposition 1.3.2 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$B_R^\dagger \simeq B_S^\dagger.$$

Ici $B_R^\dagger$ désigne la complétion faible de B vue comme R-algèbre.

Démonstration. Pour calculer $B_S^\dagger$, on peut utiliser l'idéal πS. Par définition, on a une inclusion $B_R^\dagger \hookrightarrow B_S^\dagger$. Il reste à voir que cette flèche est surjective. Soit $z \in B_S^\dagger$, z s'écrit $z = \sum p_j(\underline{x})$ avec $x_1,\ldots,x_n \in B$, $deg\, p_j \leq c(j+1)$, $p_j \in \pi^j B_{n,S}$. Décomposons

$$p_j = \sum \pi^j s_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} \mid s_{\underline{k}} \in S,$$

$$\forall \underline{k},\, s_{\underline{k}} = \sum_{l=1}^{t} r_{\underline{k},l}\sigma_l,$$

où la famille $\sigma_1,\ldots,\sigma_t$ engendre S comme R-module. Posons finalement

$$q_{j,l} = \sum_{\underline{k}} \pi^j r_{\underline{k},l} S_l \underline{X}^{\underline{k}}.$$

On considère ce polynôme comme un polynôme en les σ_l et en les X_i, de sorte que $degq_{j,l} \leq c(j+1)+1 \leq (c+1)(j+1)$ et que $q_{j,l} \in \pi^j B_{n+t,R}$. En outre, z est égal à $\sum_{j,l} q_{j,l}(\underline{\sigma},\underline{x})$, ce qui montre l'assertion.

1.3.3 Définition de $\tilde{A}$ dans le cas non commutatif.

La situation est différente du cas commutatif, d'une part, parce que $\tilde{A}$ n'est pas une R-algèbre en général et d'autre part, parce que $\tilde{A}$ n'est pas nécessairement limite inductive d'algèbres π-adiquement complètes (c'est seulement un quotient d'une limite inductive d'algèbres complètes).

Définition 1.3.3.1 *Soient $m \in \mathbf{N}$, $x_1,\ldots,x_n$, un nombre fini d'éléments de A, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des entiers ≥ 1 (les poids des x_i). On note $A_{\underline{x},\underline{\alpha},m}$ le sous R-module des éléments de A qui s'écrivent*

$$z = \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \mid \underline{l} = 0 \text{ si } |\underline{l}| >> 0, \text{et } \forall \underline{l}\ \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \frac{\underline{\alpha}\cdot\underline{l}}{m}.$$

Fixons $\underline{x}$,$\underline{\alpha}$ et m. Notons $A_m = A_{\underline{x},\underline{\alpha},m}$. Comme R-module, A_m est un quotient du sous R-module libre C_m de B_n, engendré par $\{\xi^{[\underline{\alpha}\cdot\underline{l}/m]'}\underline{X}_{\underline{l}}\}$. Soit N le R-module qui est le noyau de la surjection $C_m \to A_m$ et K_i le système projectif des noyaux des flèches $C_m/\xi^i C_m \to A_m/\xi^i A_m$. Ce système est un quotient du système projectif des $N/\xi^i N$ et vérifie donc la condition de Mittag-Leffler. Soient $\widehat{C}_m$ et $\widehat{A}_m$ les complétés π-adiques de C_m et de A_m respectivement, alors $\widehat{A}_m$ est un quotient de $\widehat{C}_m$. Introduisons $\widehat{B}_{\underline{x},m} = Im(\widehat{A}_m \to \widehat{A})$. Le raisonnement précédent permet de donner la description suivante. Le module $\widehat{B}_{\underline{x},m}$ est le sous-module de $\widehat{A}$ formé des éléments

$$z = \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \mid \forall \underline{l} \; \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \frac{\underline{\alpha}\cdot\underline{l}}{m} \text{ et } \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) - \frac{\underline{\alpha}\cdot\underline{l}}{m} \to \infty \text{ si } |\underline{l}| \to \infty.$$

En particulier, ce sous-module est un sous-module de $A^\dagger$.

Définition. On pose

$$\tilde{A} = \varinjlim_{\underline{x},m} \widehat{B}_{\underline{x},m}.$$

En général, ce sous R-module de $A^\dagger$ n'est pas une sous-algèbre de $\widehat{A}$. Cependant, les propriétés de $\tilde{A}$ énoncées ci-dessous sont vraies. On note α l'application canonique de A dans $A^\dagger$.

Proposition 1.3.3.2 *i* $\xi A^\dagger \subset \tilde{A} \subset A^\dagger$,

ii $\alpha(A) + \tilde{A} = A^\dagger$

1.3.4 Le cas des algèbres du type A.O.D.

Nous convenons d'abord d'une notation : si D est une algèbre munie d'une filtration croissante et si $x \in D$, (x) désigne la classe de x dans le module gradué $\mathrm{gr}_\bullet D$.

Nous donnons maintenant une définition formelle de ce qu'est une algèbre munie d'une structure d'algèbre d'opérateurs différentiels.

Définition 1.3.4.1 *Soit D une R-algèbre. On dit que D est munie d'une structure d'algèbre d'opérateurs différentiels (en abrégé, D est une R-A.O.D), si D est munie d'une filtration d'algèbre croissante, exhaustive, séparée, par des sous R-modules D_k, $k \in \mathbf{Z}$, telle que D_k soit un R-module de type fini pour tout k, D_0 soit une algèbre commutative, et telle que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet D$ soit une R-algèbre commutative de type fini.*

Comme l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet D$ est noethérienne, il est classique qu'une R-A.O.D. est une R-algèbre noethérienne. La définition implique aussi que D_0 est une R-algèbre commutative finie, donc p-adiquement complète. Notons S cette algèbre. Il résulte de 1.3.2, qu'il revient au même de calculer $D^\dagger_S$ ou $D^\dagger_R$. Dans la suite, nous noterons $D^\dagger = D^\dagger_S$ et les constructions $\tilde{D}$ et $D_{\underline{x},\underline{\alpha},m}$ seront faites pour la structure de S-algèbre.

Définition 1.3.4.2 *Soit $x_1, \ldots, x_n$ une famille de n éléments de D. On dit que la famille des x_i est saturée si l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet D$ est engendrée par les (x_i) comme S-algèbre.*

Cette notion permet de donner une description explicite des éléments de D. Soit $\underline{x}$ une famille saturée de n éléments de D.

Proposition 1.3.4.3 *Si $z \in D_k$, il existe des multi-indices à support dans $\{1,\dots,n\}$, une famille presque nulle de coefficients $a_{\underline{l}}$ dans S tels que*

$$z = \sum_{\underline{l}\cdot\underline{\alpha}\leq k} a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}}.$$

Comme la filtration est séparée, la démonstration de cette proposition est très classique, par récurrence sur k. On peut ainsi décrire l'algèbre $D^{\dagger}$.

Proposition 1.3.4.4 *On a la description suivante*

$$D^{\dagger} = \left\{ \sum_{\underline{l}=(l_1,\dots,l_n)} a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} \mid \exists c > 0 \ \mathrm{v}_{\xi}(a_{\underline{l}}) \geq \frac{|\underline{l}|}{c} - 1 \right\}.$$

Nous supposons ici que $degX_i = \alpha_i$, que l'on se donne des éléments $y_1,\dots,y_s$ de D tels que $y_i = p_i(\underline{x})$ où $\forall i, degp_i \leq M$. Comme la famille $\{x_1,\dots,x_n\}$ est saturée,

$$\underline{x}^{\underline{l}}.R \subset \sum_{\alpha.\underline{k}\leq\underline{\alpha}.\underline{l}} R\underline{x}^{\underline{k}}.$$

De cette propriété, on déduit :

i $p_i(\underline{x})p_j(\underline{x}) = q_{i,j}(\underline{x})$ avec $degq_{\underline{i},\underline{j}} \leq 2M$ (*),

ii $\underline{y}^{\underline{k}}(\underline{x}) = q_{\underline{k}}(\underline{x})$ avec $degq_{\underline{k}} \leq |\underline{k}|M$.

Soit $z \in D^{\dagger}$ tel que $z = \sum a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}$ avec $\mathrm{v}_{\xi}(a_{\underline{l}}) \geq |\underline{l}|/c - 1$ pour une certaine constante $c > 0$. Posons $r_0(\underline{x}) = \sum_{|\underline{k}|<2c} a_{\underline{k}}q_{\underline{k}}(\underline{x})$. alors z est égal à $r_0(\underline{x}) + \sum_{|\underline{k}|\geq 2c} a_{\underline{k}}q_{\underline{k}}(\underline{x})$, où $\deg q_{\underline{k}} \geq M|\underline{k}|$, ce qui montre la proposition. Au passage, on remarque que les modules $D_{\underline{x},m}$ sont des algèbres, grâce à (*). Considérons les algèbres $\widehat{E}_{\underline{x},m} = Im(\widehat{D}_{\underline{x},m} \to \widehat{D})$. Le raisonnement précédent montre aussi que $\tilde{\mathcal{D}}$ s'identifie à la limite inductive sur m des $\widehat{E}_{\underline{x},m}$. Finalement, les modules $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}^{\dagger}$ sont des algèbres. D'où l'énoncé suivant.

Corollaire 1.3.4.5 *Les R-modules $D_{\underline{x},m}$ sont des sous-algèbres de D. Les R-modules $\tilde{D}$ et $D^{\dagger}$ sont des sous-R-algèbres de $\widehat{D}$.*

Nous précisons ici la structure des algèbres $D_{\underline{x},\underline{\alpha},m}$ dans le cas où D est une A.O.D, puis la structure de $\tilde{D}$. Dans la suite, les poids α_i seront omis dans les notations (et toujours déterminés par les degrés des classes des x_i dans le gradué). Nous noterons $\widehat{E}_{\underline{x},m} = Im(\widehat{D}_{\underline{x},m} \to \widehat{D})$.

Proposition 1.3.4.6 *Soit D une R-A.O.D., et $x_1,\dots,x_n$ une famille saturée d'éléments de D, dont les classes dans le gradué sont de degré α_i. Soit $m \in \mathbf{N}$, l'algèbre $D_{\underline{x},m}$ est une R-A.O.D..*

i Les éléments du cran 0 de la filtration s'identifient à S.

ii L'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\bullet}D_{\underline{x},m}$ est une S-algèbre de type fini engendrée par les classes dans le gradué des éléments

$$\xi^{[\underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m]'}\underline{x}^{\underline{l}} \text{ tels que } \forall i, l_i \leq m.$$

Ces éléments forment une famille saturée de $D_{\underline{x},m}$.

iii $D_{\underline{x},m} = \left\{ \sum_{\underline{l}=(l_1,\dots,l_n)} a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} \mid \mathrm{v}_{\xi}(a_{\underline{l}}) \geq \frac{\underline{l}\cdot\underline{\alpha}}{m} \right\}.$

iv L'algèbre $\tilde{D}$ est limite inductive de R-algèbres noethériennes complètes.

Démonstration. Commençons par (i). On définit

$$F_k(D_{\underline{x},m}) = \left\{ z = \sum a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} \mid \forall \underline{l},\, \mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \frac{\underline{l}\cdot\underline{\alpha}}{m} \text{ et } \underline{l}\cdot\underline{\alpha} \leq k \text{ si } a_{\underline{l}} \neq 0 \right\}.$$

Il est clair que $F_k(D_{\underline{x},m}) \subset D_k$ et que $F_0(D_{\underline{x},m}) = S$. Dans la suite de la démonstration, ce module sera noté plus simplement F_k. Remarquons tout de suite que la filtration par les F_k est une filtration de S-algèbres et que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet D_{\underline{x},m}$ est commutative. Montrons que $F_k F_{k'} \subset F_{k+k'}$. Soient $\underline{l}$, $\underline{l}'$, $a_{\underline{l}}$, $a_{\underline{l}'} \in S$, tels que $\underline{l}\cdot\underline{\alpha} \leq k$ et $\underline{l}'\cdot\underline{\alpha} \leq k'$, et $\mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}}) \geq \underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m$ et $\mathrm{v}_\xi(a_{\underline{l}'}) \geq \underline{l}'\cdot\underline{\alpha}/m$. Par récurrence sur $k+k'$, on peut supposer que $k = [\underline{\alpha}\cdot\underline{l}]'$ et que $k' = [\underline{\alpha}\cdot\underline{l}']'$. On note $r = [\underline{\alpha}\cdot\underline{l}/m]'$ et $s = [\underline{\alpha}\cdot\underline{l}'/m]'$, et $b_{\underline{l}}$, $b_{\underline{l}'}$ des éléments de S tels que $a_{\underline{l}} = \xi^r b_{\underline{l}}$ et $a_{\underline{l}'} = \xi^s b_{\underline{l}'}$. Les entiers mr et ms sont respectivement supérieurs ou égaux à k et k'. Le produit $b_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} b_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'}$ est dans $D_{k+k'}$. On a donc une décomposition

$$b_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} b_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'} = \sum_{\underline{u}\cdot\underline{\alpha}\leq k+k'} c_{\underline{u}}\underline{x}^{\underline{u}}.$$

Pour tout $\underline{u}$ intervenant dans cette décomposition, on a l'inégalité $r+s \geq k+k'/m \geq \underline{\alpha}\cdot\underline{u}/m$, de sorte que $a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}} a_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'}$ est un élément de $F_{k+k'}$. De plus, le commutateur $[b_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}}, b_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'}]$ est dans $D_{k+k'-1}$ et se décompose

$$[b_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}}, b_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'}] = \sum_{\underline{u}\cdot\underline{\alpha}\leq k+k'-1} c_{\underline{u}}\underline{x}^{\underline{u}}.$$

L'inégalité $r+s \geq k+k'/m$ implique alors que $[a_{\underline{l}}\underline{x}^{\underline{l}}, a_{\underline{l}'}\underline{x}^{\underline{l}'}] \in F_{k+k'-1}$ et donc que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet D_{\underline{x},m}$ est commutative.

Un raisonnement identique aux raisonnements précédents montre l'égalité suivante, pour des multi-indices $\underline{l}$ et $\underline{l}'$ qui sont équivalents au sens de 1.1, et pour tout $r \geq [\underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m]'$:

$$(\xi^r \underline{x}^{\underline{l}}) = (\xi^r \underline{x}^{\underline{l}'}).$$

Cette affirmation implique que $D_{\underline{x},m}$ est la sous-algèbre de D décrite en (iii), car un multi-indice de longueur arbitraire est équivalent à un unique multi-indice de longueur n. Montrons (ii). Soit B la sous S-algèbre de $\mathrm{gr}_\bullet D_{\underline{x},m}$ engendrée par les éléments donnés en (ii). On montre par récurrence sur $\underline{l}\cdot\underline{\alpha}$, que

$$(\xi^{[\underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m]'} \underline{x}^{\underline{l}}) \in B.$$

Soit $\underline{l}$ un multi-indice de longueur n, tel que $\exists i \mid l_i > m$. On décompose alors $\underline{l} = m1_i + \underline{l}'$ et $\underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m = \alpha_i + \underline{l}'/m$, de sorte que l'on a l'égalité

$$(\xi^{[\underline{l}\cdot\underline{\alpha}/m]'} \underline{x}^{\underline{l}}) = (\xi^{[\underline{l}'\cdot\underline{\alpha}/m]'} \underline{x}^{\underline{l}'})(\xi^{\alpha_i} \underline{x}^m) \in B,$$

par récurrence. Tout cela montre finalement que l'algèbre $D_{\underline{x},m}$ est une R-A.O.D.. Par complétion, les algèbres $\widehat{D}_{\underline{x},m}$ sont noethériennes et complètes et donc aussi les algèbres quotients $\widehat{E}_{\underline{x},m}$. D'après 1.3.4.4, l'algèbre $\tilde{D}$ s'identifie à la limite inductive sur m des algèbres $\widehat{\mathcal{E}}_{\underline{x},m}$, d'où la proposition.

Proposition 1.3.4.7 *Soient E et E' deux R-A.O.D, f un homomorphisme de R-algèbres filtrées telles que $\mathrm{gr}_\bullet f$ soit fini, et m un entier fixé. Soit $\underline{x}$ une famille d'éléments de E. Alors, il existe une famille saturée $\underline{x}$ d'éléments de E, une famille saturée $\underline{y}$ d'éléments de E', telles que f induise un homomorphisme fini d'algèbres filtrées $g : E_{\underline{x},m} \to E'_{\underline{x},m}$.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_i$ une famille saturée d'éléments de E et $\tau_1, \ldots, \tau_n$ une famille saturée d'éléments de E' tels que (τ_i) est homogène de degré β_i. Soit $x \in E'_k$. Par hypothèse x se décompose

$$x = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\underline{\alpha}.\underline{l} \leq k-\beta_s} a_{\underline{l},s} f(\underline{x}^{\underline{l}}) \tau_s.$$

Complétons la famille $\{\tau_1, \ldots, \tau_n, f(x_1), \ldots, f(x_r)\}$ en une famille saturée $\{y_1, \ldots, y_u\}$. On suppose que (y_i) est homogène de degré β_i. Par construction, f induit un homomorphisme d'algèbres $g \colon E_{\underline{x},m} \to E'_{\underline{y},m}$. Soit $\underline{y}^{\underline{k}} \in F_{\underline{\beta}.\underline{k}}(E'_{\underline{y},m})$. On décompose y comme précédemment

$$\underline{y}^{\underline{k}} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\underline{\alpha}.\underline{l} \leq \underline{\beta}.\underline{k}-\beta_s} a_{\underline{l},s} f(\underline{x}^{\underline{l}}) \tau_s.$$

On voit ainsi que

$$\xi^{[\underline{\beta}.\underline{k}/m]'} \underline{y}^{\underline{k}} \in V. \sum_{s=1}^{n} \sum_{\underline{\alpha}.\underline{l} \leq \underline{\beta}.\underline{k}-\beta_s} \xi^{[(\underline{\beta}.\underline{k}-\underline{\beta}_s)/m]'} a_{\underline{l},s} f(\underline{x}^{\underline{l}}) \tau_s,$$

si bien que $E'_{\underline{y},m}$ est contenu dans le sous $E_{\underline{x},m}$-module à gauche de E' engendré par les τ_i. Par noethérianité de $E_{\underline{x},m}$, $E'_{\underline{y},m}$ est un $E_{\underline{x},m}$-module de type fini. Nous en déduisons l'énoncé suivant.

Proposition 1.3.4.8 *Reprenons les hypothèses de la proposition précédente. Supposons de plus que f induise un isomorphisme de $E_{\mathbf{Q}} \to E'_{\mathbf{Q}}$. Alors l'application canonique $f^\dagger : E^\dagger_{\mathbf{Q}} \to E'^\dagger_{\mathbf{Q}}$, déduite de f est un isomorphisme.*

Au cours de la démonstration, nous aurons besoin du lemme facile suivant.

Lemme. *Soient E et E' deux R-algèbres, telles que E soit noethérienne à gauche, et qu'il existe un homomorphisme fini de R-algèbres $f : E \to E'$, qui est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Alors, l'application f induit un isomorphisme de R-algèbres $\widehat{E}_{\mathbf{Q}} \to \widehat{E}'_{\mathbf{Q}}$.*
Commençons par démontrer le lemme. Soient K et C le noyau et le conoyau de f. Ce sont des E-modules de type fini annulés par une puissance finie de $p \colon p^a$. D'après 3.2 de [2], la complétion p-adique est exacte. On en déduit une suite exacte de $\widehat{E}$-modules de type fini

$$0 \to \widehat{K} \to \widehat{E} \to \widehat{E}' \to \widehat{C} \to 0,$$

dans laquelle $\widehat{K}$ et $\widehat{C}$ sont annulés par p^a.

Revenons à la proposition. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, nous introduisons les familles $\underline{x}_m$ et $\underline{y}_m$ comme dans la proposition. Nous notons $E_m = E_{\underline{x},m}$ et $E'_m = E'_{\underline{y},m}$, et f_m l'application construite entre E_m et E'_m. Nous introduisons aussi $\widehat{F}_m = Im(\widehat{E}_m \to \widehat{E})$ et $\widehat{F}'_m = Im(\widehat{E}'_m \to \widehat{E}')$. Il résulte de la construction des familles $\underline{x}$ et $\underline{y}$ que $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$ s'identifient respectivement à $\varinjlim_m \widehat{F}_m$ et à $\varinjlim_m \widehat{F}'_m$. D'autre part, il résulte du lemme précédent que f induit des isomorphismes $\widehat{E}_{\mathbf{Q}} \simeq \widehat{E}'_{\mathbf{Q}}$ et $\widehat{E}_{m,\mathbf{Q}} \simeq \widehat{E}'_{m,\mathbf{Q}}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{E}_{\mathbf{Q}} & \simeq & \widehat{E}'_{\mathbf{Q}} \\
\cup & & \cup \\
\widehat{F}_{m,\mathbf{Q}} & \rightarrow & \widehat{F}'_{m,\mathbf{Q}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\widehat{E}_{m,\mathbf{Q}} & \simeq & \widehat{E}'_{m,\mathbf{Q}}.
\end{array}$$

On déduit du carré commutatif du haut que la flèche $\widehat{F}_{m,\mathbf{Q}} \rightarrow \widehat{F}'_{m,\mathbf{Q}}$ est injective et du carré commutatif du bas que cette flèche est surjective. Cela montre la proposition.

Dans le cas de ces algèbres de type A.O.D., on peut aussi compléter l'énoncé de compatibilité aux changements de base donné en 1.3.2. les hypothèses sont les mêmes qu'en 1.3.2, à savoir essentiellement que S est une R-algèbre commutative finie. Soit A une R-A.O.D., telle que $B = S \otimes_R A$ soit une algèbre et que la filtration de B induite par $B_n = Im(S \otimes A_n \rightarrow B)$ soit une filtration d'algèbres. Pour simplifier la démonstration, on suppose de plus que la flèche canonique $A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres. Alors, cette filtration munit B d'une structure de S-A.O.D. On note $C = Im(S \otimes_R A^\dagger \rightarrow S \otimes_R \widehat{A})$.

Proposition 1.3.4.9 *Il existe un isomorphisme canonique de S-algèbres*

$$C \simeq (S \otimes_R A)^\dagger_S.$$

La notation $()^\dagger_S$ signifie que l'on prend la complétion faible comme S-algèbre. D'après 1.3.2, cela revient au même de prendre la complétion faible comme R-algèbre.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il existe une injection canonique de C dans $(S \otimes_R A)^\dagger_S$. Par fonctorialité, il existe une flèche évidente $A^\dagger \rightarrow (S \otimes_R A)^\dagger_R$, qui s'étend par linéarité. D'autre part, les deux algèbres à comparer sont des sous-algèbres de $S \otimes_R \widehat{A}$ et de $\widehat{S \otimes_R A}$ respectivement. Pour voir l'injectivité de la flèche précédente, il suffit de vérifier que les algèbres $S \otimes \widehat{A}$ et $\widehat{S \otimes A}$ sont canoniquement isomorphes. Cela va résulter de la finitude de S sur R et de la noethérianité de A. Partons d'une présentation de S comme R-module $R^n \rightarrow R^m \rightarrow S \rightarrow 0$. Cette présentation donne lieu à deux suites exactes de A et de $\widehat{A}$-modules en tensorisant par A et $\widehat{A}$. Comme A est noethérienne, la première suite exacte reste une suite exacte après complétion. Cela nous donne finalement un diagramme commutatif, dont deux flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{A}^m & \rightarrow & \widehat{A}^n & \rightarrow & S \otimes \widehat{A} & \rightarrow & 0 \\
S \downarrow & & S \downarrow & & \downarrow & & \\
(\widehat{A^m}) & \rightarrow & (\widehat{A^n}) & \rightarrow & (\widehat{S \otimes A}) & \rightarrow & 0.
\end{array}$$

Cela montre que $S \otimes \widehat{A}$ s'identifie à $(\widehat{S \otimes A})$ et que la flèche considérée est injective.

Montrons que cette flèche est surjective. Soit $x_1, \ldots, x_n$ une famille saturée d'éléments de A. Les hypothèses impliquent que la famille des $y_i = 1 \otimes x_i$ forme une famille saturée d'éléments de B. D'après 1.3.4.4, on peut utiliser ces éléments pour calculer $B^\dagger$. Soit $z \in B^\dagger$. Il existe des $a_{\underline{l}} \in R$ une constante $c > 0$ tels que $v_\xi(a_{\underline{l}}) > |\underline{l}|/c - 1$ tels que $z = \sum a_{\underline{l}} \underline{y}^{\underline{l}}$. Remarquons maintenant que $\underline{y}^{\underline{l}} = 1 \otimes \underline{x}^{\underline{l}}$. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_N$ des générateurs de S comme R-module. Chaque $a_{\underline{l}}$ s'écrit $a_{\underline{l}} = \sum_{i=1}^N b_{\underline{l},i}\tau_i$, et $c_i = \sum_{\underline{l}} b_{\underline{l},i}\underline{x}^{\underline{l}}$ est un élément de $A^\dagger$ pour tout i. On voit ainsi que $z \in C$.

1.4 Faisceaux d'algèbres faiblement complètes.

Dans cette partie, nous formulons en termes de faisceaux ce que nous avons fait précédemment. Soient $\mathcal{S} = \mathrm{Spf} V$, $\mathcal{X}$ un $\mathcal{S}$-schéma formel, $\mathcal{B}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres commutatives, complètes pour la topologie π-adique, $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-algèbres. Pour tout ouvert $V \subset U$ de $\mathcal{X}$ on a des flèches canoniques $\mathcal{E}^\dagger(U) \to \mathcal{E}^\dagger(V)$, où la première complétion faible est prise comme $\mathcal{B}(U)$-algèbre relativement à l'idéal $\pi\mathcal{B}(U)$ tandis que la deuxième complétion faible est prise relativement à $\mathcal{B}(V)$ et à $\pi\mathcal{B}(V)$. On définit alors le faisceau $\mathcal{E}^\dagger$ comme le faisceau associé au préfaisceau ainsi défini.

Avec ces hypothèses on a les faits suivants.

Proposition 1.4.1 *i Le faisceau $\mathcal{E}^\dagger$ est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{E}}$.*

ii Il existe une injection canonique $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})^\dagger \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger)$.

Cet énoncé n'implique pas que l'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger)$ soit une $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$-algèbre faiblement complète, même dans le cas où $\mathcal{X}$ est affine.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ le préfaisceau défini par $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{E}(\mathcal{U})^\dagger$ (comme $\mathcal{B}(\mathcal{U})$-algèbre). Par définition, $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})^\dagger$ et on a une flèche canonique $\mathcal{L}(\mathcal{X}) \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger)$ d'après la construction des faisceaux associés aux préfaisceaux. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}) \subset \Gamma(\widehat{\mathcal{U},\mathcal{E}})$ par construction de la complétion faible et ce dernier module s'identifie canoniquement à $\Gamma(\mathcal{U},\widehat{\mathcal{E}})$. Ceci implique que $\mathcal{L}$ est un sous-préfaisceau de $\widehat{\mathcal{E}}$ et que $\mathcal{E}^\dagger$ est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{E}}$. La flèche précédemment définie s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{X}) & \to & \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger) \\ \cap & & \cap \\ \Gamma(\widehat{\mathcal{X},\mathcal{E}}) & \simeq & \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{E}}), \end{array}$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. La traduction de l'énoncé sur le changement de base fini est la suivante. Soient V et V' deux anneaux de valuation discrète complets d'inégales caractéristiques $(0,p)$. On se donne un morphisme fini $V \to V'$, $\mathcal{B}$ un faisceau cohérent de V-algèbres noethériennes complètes sur $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-modules cohérents et d'algèbres. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{C}$-algèbres.

Proposition 1.4.2 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{E}^\dagger_{\mathcal{B}} \simeq \mathcal{E}^\dagger_{\mathcal{C}}.$$

Il existe un homorphisme canonique de $\mathcal{B}$-modules $\mathcal{E}^\dagger_{\mathcal{B}} \to \mathcal{E}^\dagger_{\mathcal{C}}$. Le fait que c'est un isomorphisme se vérifie localement en utilisant 1.3.2

1.4.3 Faisceaux de $\mathcal{B}$-A.O.D..

Définition. *Un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}$-algèbres est un faisceau de $\mathcal{B}$-A.O.D. si*

i Il existe une filtration d'algèbres, croissante et exhaustive, indexée par $\mathbf{N}$, par des faisceaux de $\mathcal{B}$-modules cohérents $\mathcal{E}_k$, $k \in \mathbf{N}$,

ii l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}$, associée à cette filtration est un faisceau de $\mathcal{B}$-algèbres commutatives de type fini.

Remarquons qu'un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}$-A.O.D. est cohérent. Il est à sections noethériennes sur les affines. D'autre part, si V est un ouvert affine inclus dans un ouvert affine U, $\mathcal{E}(V)$ est plat à gauche et à droite sur $\mathcal{E}(U)$ car c'est le cas pour les $\mathcal{E}_k$. Il résulte alors de 3.1.1 de [2], que $\mathcal{E}(V)$ est plat sur $\mathcal{E}(U)$.

Si U est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, l'algèbre $\mathcal{E}(U)$ est une $\mathcal{B}(U)$-A.O.D.. On dit qu'une famille de sections de $\mathcal{E}(U)$ est saturée si c'est une famille saturée pour $\mathcal{E}(V)$ comme $\mathcal{B}(V)$-A.O.D., pour tout ouvert $V \subset U$. De telles familllles saturées existent toujours localement.

Remarque. Si $x_1, \ldots, x_n$ forment une famille saturée de $\mathcal{E}$ sur un ouvert $\mathcal{U}$, on peut définir les faisceaux $\widehat{\mathcal{F}}_m = Im(\widehat{\mathcal{E}}_m \to \widehat{\mathcal{E}})$ en faisceautisant la construction donnée en 1.3.3. Cette définition n'a de sens que localement, sauf si l'on dispose d'une famille de sections globales de $\mathcal{E}$i, saturée sur tout ouvert. En revanche, on voit facilement que l'on peut définir globalement le faisceau $\tilde{\mathcal{E}} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{F}}_m$.

Nous pouvons maintenant donner une traduction en termes de faisceaux des conséquences de 1.3.4.7.

Proposition 1.4.4 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux faisceaux de $\mathcal{B}$-A.O.D., f un homorphisme de faisceaux d'algèbres $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, qui fait de $\mathcal{E}'$ un faisceau de $\mathcal{E}$-modules cohérents. Alors, localement, il existe des sous-faisceaux d'algèbres noethériennes complètes $\widehat{\mathcal{F}}_m$ de $\mathcal{E}^\dagger$, (resp. $\widehat{\mathcal{F}}'_m$ de $\mathcal{E}'^\dagger$) tels que*

i l'application f induit un homomorphisme fini $\widehat{\mathcal{F}}_m \to \widehat{\mathcal{F}}'_m$,

ii il existe des isomorphismes canoniques $\varinjlim_m \widehat{\mathcal{F}}_{m,\mathbf{Q}} \simeq \mathcal{E}^\dagger_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\varinjlim_m \widehat{\mathcal{F}'}_{m,\mathbf{Q}} \simeq \mathcal{E}'^\dagger_{\mathbf{Q}}$).

Si l'on dispose de familles saturées globales, les faisceaux $\widehat{\mathcal{F}}_m$ et $\widehat{\mathcal{F}}'_m$ sont alors définis de façon globale. On peut compléter cette proposition.

Proposition 1.4.5 *Avec les hypothèses précédentes et si f est un isomorphisne après tensorisation par $\mathbf{Q}$, f induit un isomorphisme entre $\mathcal{E}^\dagger_{\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{E}'^\dagger_{\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. Il existe une flèche canonique $\mathcal{E}^\dagger_{\mathbf{Q}} \to \mathcal{E}'^\dagger_{\mathbf{Q}}$. Voir que cette flèche est un isomorphisme est une question locale, qui se vérifie en utilisant la proposition précédente. D'autre part, on dispose de l'énoncé de structure suivant

Proposition 1.4.6 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-A.O.D, tel qu'il existe une famille de sections globales de $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$-saturée et engendrant $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}$ comme $\mathcal{B}$-algèbre, alors le faisceau $\mathcal{E}^\dagger_{\mathbf{Q}}$ est limite inductive de faisceaux complétés de $\mathcal{B}$-A.O.D., tensorisés par $\mathbf{Q}$.*

Citons enfin une version faisceautique de la proposition 1.3.4.9.

Proposition 1.4.7 *Soit $\mathcal{C}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-algèbres finies et $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-A.O.D. tels que le faisceau $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ soit un faisceau de $\mathcal{C}$-A.O.D. pour la filtration induite par celle de $\mathcal{E}$*

et tels que la flèche $\mathcal{E} \to \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ soit un homomorphisme de faisceaux d'algèbres. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau image de la flèche $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E}^{\dagger} \to (\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{B}} \widehat{\mathcal{E}})$. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{G} \simeq (\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{E})^{\dagger}.$$

2 Comparaison entre les différents faisceaux.

2.1 Description de la situation dans le cadre des schémas f. formels

Soient $X^{\dagger}$ un schéma f. formel, X_0 la réduction mod π de ce schéma formel, Z un diviseur de X_0, et $U^{\dagger}$ un ouvert de $X^{\dagger}$ tel que $U_0 = X_0 \backslash Z$. On note encore $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{U}$) le schéma formel obtenu en complétant formellement $X^{\dagger}$ par rapport à l'idéal π (ce qui signifie que le faisceau structural de $\mathcal{X}$ est le complété de $\mathcal{O}_{X^{\dagger}}$).

L'intérêt de ces hypothèses est qu'il n'est pas nécessaire de relever Z en un diviseur sur $X^{\dagger}$ et de prendre $U^{\dagger}$ comme complémentaire. Par exemple, on peut prendre $X^{\dagger}$ l'espace projectif f. formel de dimension 2 (coordonnées projectives $[u,v,w]$), pour Z le diviseur d'équation $v = 0$ dans X_0 et pour $U^{\dagger}$ le complémentaire dans $X^{\dagger}$ du fermé donné par les équations $v + pu = 0$ et $v = 0$.

2.2 Coefficients surconvergents localisés sur les schémas formels

2.2.1 Définitions.

Les définitions qui suivent sont dues à Berthelot (4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 de [2]). Une petite amélioration qui consiste à remplacer p par π que nous utilisons ici se trouve dans [5] (2). Pour cette modification des coefficients les propositions 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3 de Berthelot restent vraies. Enfin, nous aurons besoin de contruire un faisceau localisé obtenu à partir de ces coefficients.

Coefficients surconvergents sur le schéma formel. Sur un ouvert de $\mathcal{X}$ sur lequel f relève une équation de Z, on considère les faisceaux

$$\mathcal{B}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/f^{p^{m+1}}T - p,$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/f^{p^{m+1}}T - \pi.$$

Ces faisceaux de recollent en un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules et on note $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}$ (resp. $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$) leurs complétés p-adique.

Ces coefficients peuvent être considérés comme un modèle sur $\mathcal{X}$ des images directes par spécialisation des isocristaux sur U_0 surconvergents le long de Z_0 (cf 4.3.2. de [2]).

Pour décrire les faisceaux $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, nous aurons besoin de l'application $\nu_m : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, définie comme suit. Soient $k \in \mathbf{N}$, q et r, le quotient et le reste de la division euclidienne de k par p^{m+1}. Si $r = 0$, on pose $\nu_m(k) = q$. Si $r \neq 0$, on pose $\nu_m(k) = q + 1$. Pour un multi-indice $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, on pose $\nu_m(\underline{k}) = \sum_{i=1}^{N} \nu_m(k_i)$. Soit f une section locale du diviseur $\mathcal{Z}$. Une condition suffisante pour qu'une section locale de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, a/f^n avec $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, soit dans $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est que $a \in \pi^{\nu_m(n)}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Mentionnons enfin les encadrements :

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(\underline{l}) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + N,$$

$$0 \leq \nu_m(\underline{k}) - \nu_m(|\underline{k}|) \leq N.$$

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules, et si $\mathcal{Z}$ est un diviseur de Cartier relatif sur $\mathcal{X}$ défini par le faisceau d'idéaux J, on pose

$$\mathcal{E}(*\mathcal{Z}) = \varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{J}^n, \mathcal{E}).$$

Si $\mathcal{Z}$ est défini localemennt par une section f de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$,

$$\mathcal{E}(*\mathcal{Z}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left[\frac{1}{f}\right] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}.$$

Dans notre cas on peut définir l'analogue de tels faisceaux pour des faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-modules. Soit f une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ relevant une équation de Z, on pose

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/f].$$

Cette définition donne un faisceau en vertu de ce qui suit.

Lemme 2.2.1.1 *Soient f et g deux sections locales de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ relevant une équation locale de Z, alors les modules $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/f]$ et $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/g]$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Par définition, il existe $v \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ tel que $g = f - \pi v$. Soit maintenant

$$h = \sum_{n \geq 0} \pi^n v^n f^{-n} \in j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}.$$

On voit facilement que $h \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$, de sorte que l'on définit une flèche (inversible avec un inverse défini de façon analogue) comme suit

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/g] & \to & \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/f] \\ 1/g & \mapsto & h/f. \end{array}$$

On pose désormais, pour $\mathcal{E}$ un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-modules,

$$\mathcal{E}(*Z) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}[1/f] \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}} \mathcal{E}.$$

L'algèbre $\mathcal{B}^{(m)}$ (resp. $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$) est un sous-faisceau de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Par localisation, l'algèbre $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}(*Z)$ est un sous-faisceau de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*Z)$, qui s'identifie évidemment à $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. On a donc les inclusions suivantes

$$\mathcal{B}^{(m)} \subset \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \subset \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}(*Z) \subset j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}.$$

On observera de plus que $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}(*Z)_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ est isomorphe à $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$.

On introduira d'autre part

$$\mathcal{O}(^\dagger Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}^{(m)},$$

$$\mathcal{O}(^\dagger\!*Z) = \lim_{\longrightarrow m} \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}(*Z).$$

On peut introduire des faisceaux analogues avec les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$: le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(^\dagger\!*Z)$ obtenu est alors canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}(^\dagger\!*Z)$.

Lemme 2.2.2 $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \bigcap j_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(*Z)$.

Ce lemme est une variante du lemme 7.2.1 de [5]. L'assertion est locale. On peut donc supposer que l'on se trouve sur un ouvert affine $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$, défini par une algèbre complète A, tel que $f \in A$ relève une équation locale de $Z \bigcap V_0$. Introduisons $B = \Gamma(\mathcal{V},\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ et $\widehat{B}$ son complété p-adique. Comme Z est un diviseur de Cartier sur X_0, on a une injection $\alpha\colon A/\pi A \to A[1/f]/\pi A[1/f]$. Soit $u \in \widehat{B}_{\mathbf{Q}} \bigcap A\{1/f\}$. Cet élément se décompose $u = f^{-n}h + r$, avec $r \in \widehat{B}$, $n \in \mathbf{N}$, et $h \in A_{\mathbf{Q}} \bigcap A\{1/f\}$. Soit s minimal tel que $k = p^s h$ soit dans A. Alors, si $s \geq 1$, $\alpha(k) = 0$ et donc $k \in pA$, ce qui contredit la minimalité de s. Finalement on voit que $h \in A$.

Proposition 2.2.3 *Le faisceau $\mathcal{O}(^\dagger\!*Z)$ est un faisceau cohérent d'algèbres faiblement complètes, complétion faible, comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-algèbre, du faisceau $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(*Z)$, pour tout $m \in \mathbf{N}$.*

Si le diviseur Z se relève en un diviseur $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{X}$, le faisceau obtenu est le complété faible de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{Z})$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres.

Démonstration. Notons $\mathcal{C}$ le faisceau considéré. La question est locale : nous nous plaçons sur un ouvert affine $\mathcal{V}$, correspondant à une algèbre complète, noethérienne, A, sur lequel f relève une équation locale de Z. Notons $B^{(m)} = \Gamma(\mathcal{V},\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ et $\widehat{B}^{(m)}$ son complété p-adique. Alors, on a

$$\Gamma(\mathcal{V},\mathcal{O}(^\dagger\!*Z)) = \lim_{\longrightarrow m} \widehat{B}^{(m)}[1/f].$$

Notons F cette algèbre. Il s'agit de montrer que F est f. complète. Soit s un entier, h une série de $V\{X_1,\ldots,X_s\}$, et

$$h = \sum_{\underline{i}\in\mathbf{N}^s} a_{\underline{i}}\underline{X}^{\underline{i}}, \text{et } \exists c > 0 \,|\, \forall \underline{i} \in \mathbf{N}^s, \mathrm{v}_p(a_{\underline{i}}) \geq \frac{|\underline{i}|}{c} - 1.$$

Soient $x_1,\ldots,x_s$ des éléments de F. Il faut montrer que $h(\underline{x_i})$, qui converge vers un élément de $A\{1/f\}$, converge en fait pour la topologie p-adique vers un élément de F. On peut supposer que l'on choisit un n et un m assez grands pour que

$$\forall i,\, f^n x_i = y_i \in \widehat{B}^{(m)}.$$

Soient maintenant $n_{\underline{i}}$ la partie entière de $|\underline{i}|/2c$ et $a_{\underline{i}} = p^{n_{\underline{i}}}b_{\underline{i}}$, $z_{\underline{i}} = b_{\underline{i}}/f^{n|\underline{i}|}$. On peut supposer que m est assez grand pour qu'on ait les inégalités, pour tout $\underline{i}$, et pour une certaine constante entière D :

$$\nu_m(n|\underline{i}|) \leq \frac{n|\underline{i}|}{p^{m+1}} + N \leq \frac{|\underline{i}|}{2c} + D \leq \mathrm{v}_p(b_{\underline{i}}) + D.$$

De cette façon, pour tout $\underline{i}$, $p^D z_{\underline{i}}$ est un élément de $\widehat{B}^{(m)}$ et $p^D a_{\underline{i}}\underline{x}^{\underline{i}} \in \pi^{n_{\underline{i}}}\widehat{B}^{(m)}$. Ainsi l'élément $\sum p^D a_{\underline{i}} x_{\underline{i}}$ converge en fait vers un élément de $\widehat{B}^{(m)}$. Il s'ensuit que $f(\underline{x_i})$ est dans l'intersection $A\{1/f\} \bigcap \widehat{B}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$, qui est égale à $\widehat{B}^{(m)}[1/f]$, comme il a été rappelé dans le lemme précédent.

Considérons l'algèbre faiblement complète

$$A\{U\}^{\dagger} = \left\{ \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k U^k \mid a_k \in A \text{ et } \exists\lambda > 0 \mid \mathrm{v}_p(a_k) \geq \frac{k}{\lambda} - 1 \right\}.$$

D'après un résultat de Fulton ([3]), cette algèbre est noethérienne et il existe une surjection A-linéaire $A\{U\}^{\dagger} \to F$. Cela donne la noethérianité de F. La proposition 3.1.1. de [2] permet alors de voir que $\mathcal{C}$ est un faisceau cohérent.

Remarques. Observons que les algèbres $\widehat{B}^{(m)}[1/f]$ ne sont pas faiblement complètes. Par exemple, si $A = V\{t\}$ et si $t = 0$ est une équation de Z, alors la série suivante est dans $(\widehat{B}^{(m)}[1/f])^{\dagger}$, mais pas dans $\widehat{B}^{(m)}[1/f]$:

$$h = \sum p^{[n/2p^{m+1}]}/t^n.$$

Dans la suite, nous utiliserons abondamment le fait qu'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(^{\dagger}\mathcal{Z})$-module cohérent nul sur l'ouvert complémentaire du diviseur $\mathcal{Z}$, est nul. En particulier, on peut faire la remarque suivante :

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(^{\dagger}\mathcal{Z})$-modules cohérents, alors la flèche de restriction $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est injective.

En effet, si s est une section globale qui est dans le noyau de la flèche précédente, alors le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ engendré par s est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(^{\dagger}\mathcal{Z})$-modules cohérent, nul sur $\mathcal{U}$, donc nul, et s est nulle.

2.3 Comparaison entre les faisceaux de coefficients.

Nous reprenons la situation de 2.1 avec $X^{\dagger}$, $U^{\dagger}$, $Z \subset X_0$, et les complétés formels $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$. Nous comparons ici les faisceaux de coefficients de ces espaces annelés, vus comme faisceaux sur $\mathrm{spec}X_0$. Précisément, on a l'énoncé

Proposition 2.3.1 *On a un homomorphisme canonique injectif*

$$j_*\mathcal{O}_{U^{\dagger}} \overset{h}{\hookrightarrow} \mathcal{O}(^{\dagger}*Z).$$

Démonstration. On a un homorphisme canonique de passage aux complétés π-adiques

$$j_*\mathcal{O}_{U^{\dagger}} \overset{h}{\hookrightarrow} j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}},$$

qui est injectif, car le premier faisceau est un faisceau d'algèbres f. complètes, π-adiquement séparées. Comme le faisceau $\mathcal{O}(^{\dagger}\mathcal{Z})(*\mathcal{Z})$ est un sous-faisceau de $j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, il suffit d'observer que h est en fait à valeurs dans ce sous-faisceau, ce qui est local. Soit $V^{\dagger}$ un ouvert f. formel affine de $X^{\dagger}$, correspondant à l'algèbre f. complète $A^{\dagger}$. Soient $\mathcal{V}$ la complétion formelle de $V^{\dagger}$, $\widehat{A}$ l'algèbre complétée de $A^{\dagger}$, $\widehat{B}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{V},\widehat{\mathcal{B}}^{(m)})$. On a alors les descriptions suivantes

$$\Gamma(V^{\dagger},j_*\mathcal{O}_{U^{\dagger}}) = A^{\dagger}[1/f]^{\dagger}, \quad \Gamma(\mathcal{V},\mathcal{O}(^{\dagger}*Z)) = \varinjlim_m \widehat{B}^{(m)}\left[\frac{1}{f}\right].$$

La flèche de passage aux complétés induit une flèche $A[1/f] \to \widehat{A}[1/f]$, d'où finalement une flèche $\Gamma(V^\dagger, j_*\mathcal{O}_{U^\dagger}) \to \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}({}^\dagger * Z))$, car cette dernière est faiblement complète d'après la proposition précédente. D'autre part, il est clair que cette flèche coïncide avec la flèche provenant du passage à la complétion.

Cette proposition nous permet de considérer le foncteur suivant.

Définition 2.3.2 *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $j_*\mathcal{O}_{U^\dagger}$-modules cohérent, on pose*

$$\rho'(\mathcal{E}) = \mathcal{O}({}^\dagger * Z) \otimes_{j_*\mathcal{O}_{U^\dagger}} \mathcal{E}.$$

Nous étudierons cette application plus en détails dans le cas des schémas projectifs munis d'un diviseur ample.

2.4 Opérateurs différentiels usuels

Ici, la lettre X désigne indifféremment un schéma, ou un schéma formel, ou un schéma f. formel, lisse sur une base S. Dans 16.8 de [1], est donnée la définition générale du faisceau des opérateurs différentiels sur X. Une description en coordonnées locales est la suivante. Soient V est un ouvert de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales $x_1, \cdots, x_N$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\underline{\partial}^{\underline{k}} = \prod_{\underline{k}} \partial_i^{k_i}$. Le faisceau $\mathcal{D}_{X|V}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module libre de base les $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ tels que $\underline{k}!\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}^{\underline{k}}$.

En particulier, si $S = \mathrm{Spf} W$, si X est un schéma formel $\mathcal{X}$, et si X_i est la réduction de $\mathcal{X}$ *mod* π^{i+1}, alors on a une injection

$$\mathcal{D}_{X_i} \hookrightarrow End_{W/\pi^i W}(\mathcal{O}_{X_i}).$$

On voit de la même façon que l'on a une injection

$$\widehat{D}_{\mathcal{X}} \hookrightarrow End_W(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

2.5 Opérateurs différentiels p-adiques de Mebkhout et Narvaez-Maccaro

Ici, $X^\dagger$ est un schéma f. formel lisse. Nous n'utiliserons pas la définition de Mebkhout et Narvaez-Maccaro donnée dans [7], mais une définition équivalente, mentionnée dans [7]. L'équivalence de ces deux définitions est démontrée dans [8].

Soit $X^\dagger$ un schéma formel, formellement lisse, i.e. (2.5 de [10]), $\mathcal{O}_{X^\dagger}$ est un V-module plat, et X_0 est un S_0-schéma lisse (ou encore X_i est un S_i-schéma lisse pour tout i). Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger}$ sera la limite inductive sur m des complétions faibles des faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger}$. Pour la suite, nous aurons besoin de détailler cette construction.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{O}_{X^\dagger} \otimes^\dagger_V \mathcal{O}_{X^\dagger}$ la complétion faible, comme V-algèbre, de $\mathcal{O}_{X^\dagger} \otimes_V \mathcal{O}_{X^\dagger}$, et $\mathcal{I}$ le noyau de la surjection canonique

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{X^\dagger} \otimes^\dagger_V \mathcal{O}_{X^\dagger} & \to & \mathcal{O}_{X^\dagger} \\ a \otimes b & \mapsto & ab. \end{array}$$

Le faisceau $\mathcal{I}$ est un faisceau de $\mathcal{C}$-modules cohérents. En particulier, l'idéal $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un $\mathcal{O}_{X^\dagger}$-module cohérent. Comme $\mathcal{O}_{X^\dagger}$ est sans torsion, le faisceau $\mathcal{I}/\pi\mathcal{I}$ est le noyau de la surjection

$\mathcal{O}_{X_0} \otimes \mathcal{O}_{X_0} \to \mathcal{O}_{X_0}$, qui est un idéal localement libre de type fini. L'idéal $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est donc aussi localement libre de type fini. Notons $\mathcal{P}^n_{X^\dagger,(m)}$, l'enveloppe à puissance divisées de niveau m de l'algèbre $\mathcal{C}$ relativement à l'idéal $\mathcal{I}$ (1.4 de [2],), qui est une algèbre munie d'un idéal contenant l'image de $\mathcal{I}$, lui-même pourvu de puissances divisées partielles de niveau m (1.3 de [2]). Comme $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre, cette construction ne dépend pas du choix des puissances divisées sur la base et l'algèbre $\mathcal{P}^n_{X^\dagger,(m)}$ est un $\mathcal{O}_{X^\dagger}$-module à gauche localement libre. On pose

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger} = \mathcal{H}om(\mathcal{P}^n_{X^\dagger,(m)},\mathcal{O}_{X^\dagger}),$$

que l'on peut munir d'une structure d'algèbre (2 de [2]), qui est le faisceau des opérateurs différentiels de niveau (m) sur $X^\dagger$. Ce faisceau est un $\mathcal{O}_{X^\dagger}$-module localement libre.

Supposons que localement $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ ait pour base $\tau_1 = 1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1, \ldots ,\tau_N = 1 \otimes x_N - x_N \otimes 1$, alors (1.5.3, 1.3.5.4, de [2]) $\mathcal{P}^n_{X^\dagger,(m)}$ est libre de base les

$$\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}_{(m)} = \prod_{i=1}^{N} \tau_i^{\{k_i\}_{(m)}}, \, où \; \tau_i^{\{k_i\}_{(m)}} = \frac{k_i!}{q^{(m)}_{k_i}!}\tau_i^{[k_i]},$$

$q^{(m)}_k$ étant le quotient de la division euclidienne de k par p^m. On obtient localement une base de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger}$ en prenant une base duale de cette base, pour n variable, notée $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$. Les règles de calculs pour ces opérateurs sont données en 2.2.4 de [2].

On note enfin $\mathcal{D}^{(m)\dagger}_{X^\dagger}$ la complétion faible, comme V-algèbre, des faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger}$. Ces algèbres forment un système inductif et $\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger}$ est la limite inductive de ces algèbres (cf la remarque suivant la proposition 4.2.2 de [7] ou [8]). Cette algèbre est une V-algèbre f. complète.

2.6 Opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel lisse sur $\mathcal{S}$ (i.e. X_i est lisse sur S_i pour tout $i \in \mathbf{N}$).

2.6.1 Faisceaux sans pôles.

La construction de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ est tout à fait analogue à celle qui a été expliquée dans la sous-section précédente. Berthelot définit $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ comme le complété π-adique de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ comme la limite inductive des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ est un faisceau cohérent. Nous examinons ici plus en détails une descriptions de ces faisceaux en coordonnées locales.

Nous aurons besoin d'une description en coordonnées locales des faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Pour les justifications des affirmations qui suivent, nous renvoyons à [2]. Si k est un entier, $\mathrm{v}_p(k)$ est sa valuation p-adique et $q^{(m)}_k$ désigne le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Si $\underline{k} = (k_1, \cdots ,k_N)$ est un multi-indice, on note

$$q^{(m)}_{\underline{k}}! = \prod_i q^{(m)}_{k_i}!.$$

Si $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales $x_1, \cdots ,x_N$, le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{V}}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module libre de base les

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = \prod_i \partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle_{(m)}},$$

où les opérateurs $\partial_{x_i}^{\langle k_i\rangle_{(m)}}$ vérifient la relation

$$\frac{k_i!}{q_{k_i}^{(m)}!}\partial_{x_i}^{\langle k_i\rangle_{(m)}} = \partial_{x_i}^{k_i},$$

l'opérateur ∂_{x_i} étant la dérivation usuelle par rapport à x_i.

Ceci donne la description suivante de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ en coordonnées locales

$$\Gamma(\mathcal{V},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}) = \left\{ P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}}\underline{\partial}^{[\underline{k}]}, a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\mathcal{V}) \text{ et } \exists C>0, \eta<1, |\,|a_{\underline{k}}|_{sp} < C\eta^{|\underline{k}|} \right\},$$

où $|.|_{sp}$ désigne la norme spectrale sur l'algèbre de Tate $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})\otimes\mathbf{Q}$.

Nous utiliserons aussi les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} \dfrac{|\underline{k}|}{p-1} - N\log_p(|\underline{k}|+1) - N & \leq & \mathrm{v}_p(\underline{k}!) & \leq & \dfrac{|\underline{k}|}{p-1}, \\ \dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)} - N\log_p(|\underline{k}|+1) - \dfrac{Np}{p-1} & \leq & \mathrm{v}_p(q_{\underline{k}}^{(m)}!) & \leq & \dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)}. \end{array}$$

2.6.2 Faisceaux d'opérateurs à pôles surconvergents.

Nous nous plaçons maintenant dans la situation de 2.1. La construction qui suit est due à Berthelot (4.2 de [2]). On observe d'abord que le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$) est un $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module à gauche. Ensuite, on utilise la règle de Leibnitz pour voir que le faisceau

$$\mathcal{D}^{(m)}(\infty) = \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}},$$

est un faisceau d'anneaux cohérent, à sections noethériennes sur les affines. Le complété de ce faisceau est noté $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(\infty)$ et on note enfin

$$\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(\infty)_{\mathbf{Q}}.$$

Ce faisceau est un faisceau d'anneaux cohérent. La même construction peut être faite avec les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, ce qui ne change pas le faisceau $\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}$.

De plus, dans [6], nous montrons que le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(*Z)$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module à gauche, de sorte que le faisceau

$$\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)(*Z) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(*Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$$

est aussi muni d'une structure de faisceau d'anneaux cohérent, dont le complété sera noté $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)(*Z)$. Nous introduisons aussi

$$\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}({}^\dagger *Z) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger *Z) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}},$$

$$\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger *Z) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(\infty)(*Z).$$

On voit facilement en coordonnées locales, que les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)(*Z)$ (resp. $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}({}^\dagger *Z)$) sont des sous-faisceaux de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{U}}$. Ce faisceau s'identifie à $\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}$, après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Nous admettrons de plus que le faisceau $\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger *Z)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres faiblement complètes. Ce résultat est montré dans [6].

Si $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales $x_1,\dots,x_N$ et si f est une équation relevant une équation de Z, on a la description suivante de $\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger{*}Z)$

$$\Gamma(\mathcal{V},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger{*}Z)) = \left\{ \sum_{l,\underline{k}} \frac{a_{l,\underline{k}}}{f^l}\underline{\partial}^{[\underline{k}]}, a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\mathcal{V}) \text{ et } \exists C>0, \eta<1, |\,|a_{l,\underline{k}}|_{sp} < C\eta^{|\underline{k}|+l} \right\}.$$

On observera que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger{*}Z)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{U}}$.

2.7 Comparaison entre les différents faisceaux d'opérateurs différentiels.

Pour comparer les faisceaux précédemment introduits, nous considérons un schéma f. formel formellement lisse $X^\dagger$ et $\mathcal{X}$ le complété formel de $X^\dagger$ le long de π, qui est aussi lisse. Par fonctorialité, (cf 2.1.4 de [2]), on dispose de flèches, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger},$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{P}^n_{X^\dagger,(m)} \to \mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)}.$$

Nous pouvons préciser.

Proposition 2.7.1 *Les flèches ci-dessus sont des isomorphismes.*

L'assertion est locale. Partons de la suite exacte de $\mathcal{C} = \mathcal{O}_{X^\dagger} \otimes^\dagger \mathcal{O}_{X^\dagger}$-modules cohérents

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{X^\dagger} \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{O}_{X^\dagger} \to \mathcal{O}_{X^\dagger} \to 0.$$

Comme l'algèbre $\mathcal{C}$ est noethérienne ([3]), cette suite reste exacte après complétion p-adique et donne une suite exacte

$$0 \to \widehat{\mathcal{I}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to 0.$$

Remarquons aussi que la complétion p-adique de $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ coïncide avec $\widehat{\mathcal{I}}/\widehat{\mathcal{I}}^2$. Il suffit en effet de vérifier que l'idéal $\widehat{\mathcal{I}}^2$ est la complétion p-adique de $\mathcal{I}^2$. D'après la propriété universelle de la complétion π-adique, on a un homomorphisme de $\widehat{\mathcal{C}}$-modules cohérents, (injectif car les deux faisceaux sont des sous-faisceaux de $\widehat{\mathcal{C}}$) $\widehat{\mathcal{I}^2} \to \widehat{\mathcal{I}}^2$. Pour voir que cette flèche est surjective, il suffit de voir qu'elle est surjective modulo π. Or, $\widehat{\mathcal{I}}^2$ est engendré par les produits $x.y$ avec $x,y \in \widehat{\mathcal{I}}$. Soient $x_1,y_1 \in \mathcal{I}$ et $x_2,y_2 \in \widehat{\mathcal{I}}$ tels que $x = x_1 + \pi x_2$ et $y = y_1 + \pi y_2$. Alors $xy = x_1y_1 \bmod \pi\widehat{\mathcal{I}}^2$, ce qui montre l'assertion.

Soit τ_i une base locale de $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, on note de la même façon la base obtenue à partir de celle-ci pour $\widehat{\mathcal{I}}/\widehat{\mathcal{I}}^2$. Les faisceaux $\mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)}$ et $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ sont alors libres de base respectivement $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}_{(m)}, |\underline{k}| \leq n$ et $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}_{(m)}$, les flèches définies ci-dessus préservant les éléments de la base. On en déduit l'assertion suivante

Corollaire 2.7.2 *Il existe un homorphisme canonique injectif $\mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$. Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ est la complétion faible, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre du faisceau*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe un homomorphisme (injectif) $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, qui donne une flèche $\mathcal{D}^{(m)\dagger}_{X^\dagger} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, d'après la propriété universelle de la complétion faible. Par passage à la limite inductive sur m, on a la flèche cherchée. Comme les deux faisceaux sous des sous-faisceaux de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$, cette flèche est injective.

Notons

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{D}^\dagger_{X^\dagger},$$

et $\mathcal{F}^\dagger$ la complétion faible de cette algèbre comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre. Nous verrons dans la sous-section suivante que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ est la complétion faible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre. De la flèche canonique $\mathcal{D}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{F}$, on déduit une flèche $\lambda : \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}} \to \mathcal{F}^\dagger$. Il reste à obtenir la flèche inverse. Par commutation à la limite inductive de la complétion faible, $\mathcal{F}^\dagger$ est isomorphe à

$$\varinjlim_m (\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X^\dagger}} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger})^\dagger,$$

où la complétion faible est prise comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre. Or, on dispose d'une flèche $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, d'où une flèche en passant à la complétion faible et une flèche $\mu : \mathcal{F}^\dagger \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$ en passant à la limite inductive sur m. Le fait que λ et μ soit inverses l'une de l'autre est clair en coordonnées locales.

Nous nous plaçons maintenant dans la situation de 2.1.

Proposition 2.7.3 *i L'application ρ' définie en 2.3.2 définit un isomorphisme entre $\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$ et $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$.*

ii Il existe un homorphisme canonique injectif $j_*\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger} \to \mathcal{D}^\dagger(^\dagger{*}Z)$. Si le diviseur Z se relève en un diviseur sur $X^\dagger$, dont le complété formel est $\mathcal{Z}$, le faisceau $\mathcal{D}^\dagger(^\dagger{*}Z)$ est la complétion faible, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre du faisceau

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{Z}) \otimes_{j_*\mathcal{O}_{U^\dagger}} \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger}.$$

Démonstration. Démontrons la première partie de cette proposition. Le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{U}}$. La flèche canonique de passage aux complétés $\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$ donne une flèche de $\rho'(\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger})$ vers $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{U}}$. Il suffit de voir en coordonnées locales, sur ou ouvert $V^\dagger$ tel que Z soit défini par une équation $f = 0$, que cette flèche est à valeurs dans $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$ et est un isomorphisme. Si $V^\dagger$ est un ouvert muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_M$, les deux faisceaux considérés sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$-modules libres de base les $\underline{\partial}^{\langle k \rangle}_{(m)}$, avec les notations de 2.6.1.

Introduisons $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{Z}) \otimes_{j_*\mathcal{O}_{U^\dagger}} \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger}$ et $\mathcal{F}^\dagger$ la complétion faible de ce faisceau, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre. Les flèches précédentes donnent des flèches $\mathcal{F}^{(m)} \to \mathcal{D}^\dagger(^\dagger{*}Z)$. Comme cette dernière algèbre est f. complète, on en déduit une flèche $\mathcal{F}^\dagger \to \mathcal{D}^\dagger(^\dagger{*}Z)$. Nous verrons en 2.8.2, que le faisceau $\mathcal{D}^\dagger(^\dagger{*}Z)$ est la complétion faible du faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{Z})$. D'après le (i) de la proposition, il existe une flèche de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$ vers $\mathcal{F}$ et donc vers $\mathcal{F}^\dagger$. En passant à la limite inductive sur m, cela donne une flèche de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(^\dagger{*}Z)$ vers $\mathcal{F}^\dagger$ qui est un inverse à la flèche précédente. Ceci nous permet de définir un foncteur d'extension des scalaires

Définition 2.7.3.1 *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}$-modules cohérents, on pose*

$$\rho(\mathcal{M}) = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(^\dagger{*}Z) \otimes_{j_*\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}} j_*\mathcal{M}.$$

2.8 Exemples de complétions faibles.

Proposition 2.8.1 *Soient A_N l'algèbre de Weyl de dimension N à coefficients dans V, $A_N^\dagger$, sa complétion faible.*

$$A_N^\dagger = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N},\underline{k}\in\mathbf{N}} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in V \text{ et } \exists c>0 \mid \forall(\underline{l},\underline{k}) \ \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},\underline{k}}) \geq \frac{|\underline{l}|+|\underline{k}|}{c} - 1 \right\}.$$

On rappelle que $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \prod \partial_1^{[k_1]}\ldots\partial_n^{[k_n]}$ et que $k_i!\partial_i^{[k_i]} = \partial_i^{k_i}$.

Nous utiliserons les notations et encadrements signalés à cet endroit.

Démonstration. On peut par exemple calculer $\tilde{A}$ en filtrant A par la sous-algèbre A_m engendrée par la famille des $\underline{y}$ qui est égale à $\left\{x_1,\ldots,x_n,\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_1}^{[p^m]},\ldots,\partial_{x_n},\ldots,\partial_{x_n}^{[p^m]}\right\}$. Si k est un entier q_k et r_k sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de k par p^m. Cette notation se généralise aux multi-indices. Si $a\in\mathbf{N}$ est fixé, on pose encore

$$b_{\underline{l},\underline{k}} = \frac{|\underline{l}|+q_{\underline{k}}+r_{\underline{k}}}{a}.$$

Comme V-module, l'algèbre $A_{\underline{y},a}$ est libre et le calcul de donne : soit $z\in\widehat{A_N}$, alors $z\in\widehat{B}_{\underline{y},l}$ si et seulement si

$$z=\sum r_{\underline{l},\underline{k}}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}} \mid \mathrm{v}_\pi(r_{\underline{l},\underline{k}}) \geq b_{\underline{l},\underline{k}} \text{ et } \mathrm{v}_\pi(r_{\underline{l},\underline{k}}) - b_{\underline{l},\underline{k}} \to \infty \text{ si } |\underline{k}|+|\underline{l}|\to\infty.$$

La démonstration de la proposition résulte alors des encadrements mentionnés en 2.6.1. On voit aussi facilement, que l'on a les faits suivants

Proposition 2.8.2 *Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel lisse,*

i $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$ est la complétion faible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module,

ii $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$ est la complétion faible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(*\mathcal{Z})$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre.

Dans les deux cas, la démonstration consiste en des calculs en coordonnées locales. Au passage, on a la description suivante. On note $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)\dagger}$ la complétion faible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre, et $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})^\dagger$ la complétion faible de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ comme $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-algèbre.

Proposition 2.8.3 *i* $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger \simeq \varinjlim_m \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)\dagger}$,

ii $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger({}^\dagger\mathcal{Z}) \simeq \varinjlim_m (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})^\dagger$.

Démonstration. Nous montrons la deuxième assertion (dont la première est un cas particulier). Il suffit d'observer que l'on a l'inclusion suivante

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \subset (\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}\otimes\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})^\dagger.$$

Pour voir cela, nous nous plaçons sur un ouvert muni de coordonnées locales et nous adoptons les notations de 2.6.1. Une section locale de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ s'écrit

$$z=\sum a_{\underline{k}}\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}} \text{ et } \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{k}})\to\infty \text{ si } |\underline{k}|\to\infty.$$

Notons

$$c_{\underline{k}} = \frac{q_{\underline{k}}^{(m)}!}{q_{\underline{k}}^{(m+1)}!},$$

de sorte que $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} = c_{\underline{k}}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m+1)}}$. Remarquons que $\mathrm{v}_\pi(c_{\underline{k}}) \geq 0$ et qu'il résulte des inégalités 2.6.1 qu'il existe une constante positive D telle que

$$\forall \underline{k}, \mathrm{v}_\pi(c_{\underline{k}}) \geq \frac{|\underline{k}|}{2p^{m+1}} - D.$$

Soit $\lambda > \max\{4Dp^{m+1}, 4Dp^{m+1}/(D-1)\}$, alors

$$\forall \underline{k}, \mathrm{v}_\pi(c_{\underline{k}}) \geq \frac{|\underline{k}|}{\lambda} - 1.$$

Cela montre l'assertion.

3 Equivalence de catégories entre les coefficients dans notre cas.

3.1 Hypothèses sur le diviseur.

Nous reprenons les notations de 2.1. Nous supposons de plus que le diviseur Z est ample et que $\mathcal{L}(Z)$ est isomorphe à la réduction $mod\, \pi$ d'un faisceau ample inversible, $\mathcal{L}$ sur $X^\dagger$. Ce faisceau définit une immersion fermée ι dans un espace projectif f. formel de dimension M, $Y^\dagger$. La lettre ι désignera aussi l'immersion fermée entre les complétions formelles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Les coordonnées projectives sur $\mathcal{Y}$ seront notées $[u_0, \ldots, u_N]$ et le diviseur à l'infini $u_0 = 0$ sera noté ∞.

Comme le remarque Berthelot dans l'appendice de [5], cette hypotèse implique qu'il existe un entier s tel que $Z' = sZ$ soit un diviseur de Cartier qui se relève en un diviseur de Cartier $Z'^\dagger$, ample sur $X^\dagger$. On vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 3.1.1 *Il existe des isomorphismes canoniques*

i $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z')$,

ii $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z) \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z')$.

Cette remarque nous permet d'utiliser Z' pour construire les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z)$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}(^\dagger *Z)$. Pour alléger les notations, nous supposerons dans toute la suite que le diviseur Z lui-même se relève en un diviseur de Cartier ample sur $X^\dagger$.

On considère maintenant les schémas complétés formels des schémas faiblement formels précédents le long de l'idéal engendré par π, que nous noterons $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$. Le diviseur $\mathcal{Z}$ est ample et définit une immersion fermée de $\mathcal{X}$ dans un espace projectif formel $\mathcal{Y}$ de dimension M. Les faisceaux considérés dans ce contexte sont toujours des faisceaux sur l'espace topologique $\mathrm{specX}_0 = \mathrm{specX}^\dagger/\pi\mathrm{X}^\dagger = \mathrm{spec}\mathcal{X}/\pi\mathcal{X}$. Pour comparer les différents faisceaux intervenant, on les considérera comme tous définis sur specX_0.

3.2 Propriétés des faisceaux cohérents sur les espaces projectifs faiblement formels.

Nous utiliserons les résultats suivants dus à Meredith ([9]):

- *Si $U^\dagger$ est un schéma f. formel affine et si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{U^\dagger}$-modules cohérents, alors $\mathcal{F}$ est cohomologiquement trivial sur $U^\dagger$ pour le foncteur Γ. D'autre part, les $\mathcal{O}_{U^\dagger}$-*

modules cohérents correspondent bijectivement aux modules de type fini sur $\Gamma(U^\dagger,\mathcal{O}_{U^\dagger})$ (thm 2.14 de [9]).

- Grâce au théorème de comparaison énoncé en 5 de [9], la cohomologie des faisceaux cohérents sur l'espace f. formel projectif de dimension M s'analyse comme la cohomologie des faisceaux cohérents sur l'espace projectif sur V de dimension [9]. D'autre part, la proposition 4 de la 6e partie de l'article de Meredith affirme que *tout faisceau cohérent sur un schéma f. formel projectif est quotient d'une somme directe de twists de Serre du faisceau structural.*

3.3 Coefficients surconvergents sur les schémas formels projectifs.

Nous utiliserons aussi les résultats d'acyclicité des $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules établis par P. Berthelot dans l'appendice de [4]. En particulier, avec les notations de 2.2.1, on a les résultats suivants. Donnons d'abord des résultats concernant les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$.

i $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(r))=0$ si $r\geq 0$,

ii $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(r))=0$ est un V-module de type fini de torsion, si $r\leq 0$.

Les conséquences pour la cohomologie des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-modules cohérents sont les suivantes. Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module cohérent.

i $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(r))=0$ est un V-module de type fini de torsion, si $r\leq 0$.

ii Il existe un couple $(r,a)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$ et une surjection

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(r)^a\rightarrow\mathcal{E}.$$

(i) *Les* $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$*-modules cohérents sont acycliques pour le foncteur* Γ.

(ii) Il existe une équivalence de catégories naturelle entre les $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$*-modules cohérents et les modules cohérents sur l'algèbre de sections globales* $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$.

Nos aurons aussi besoin des résultats de [5] concernant les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Le résultat le plus important est le suivant.

Proposition 3.3.1 *Soit* $\mathcal{E}$ *un faisceau de* $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$*-modules cohérents. Alors*

i le module $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ *est un* $\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$*-module de type fini,*

ii il existe $m'\geq m$ *tel que, pour tout* $m''\geq m'$ *le conoyau de l'application suivante soit annulé par* π

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')}\otimes_{\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')})}\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')}\otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}}\mathcal{E})\rightarrow\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')}\otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}}\mathcal{E}.$$

3.4 Sections globales des faisceaux de coefficients dans le cas de l'espace projectif.

Le but de cette sous-partie est de préciser le théorème de comparaison que l'on a entre les faisceaux de coefficients sur l'espace affine f. formel de dimension M, et les coefficcients à pôles surconvergents et localisés à l'infini sur l'espace projectif formel de dimension M, noté $Y^\dagger$. Nous commençons par calculer les sections globales de ces différents faisceaux de coefficients.

Nous notons $V^\dagger$ l'ouvert complémentaire du diviseur ∞ dans $Y^\dagger$, $[u_0,\dots,u_M]$ les coordonnées projectives sur $Y^\dagger$ et $y_i = u_i/u_0$. L'ouvert $V_i^\dagger$ est l'ouvert $D(u_i)$ sur $V^\dagger$ et $\mathcal{U}_i$ est l'ouvert $D_+(u_i)$ sur $\mathcal{Y}$.

Proposition 3.4.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Gamma(V^\dagger,\mathcal{O}_{V^\dagger}) \simeq \Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\mathcal{Z})).$$

Explicitons d'abord la flèche λ donnée en 2.3.1. Les calculs donnent :

$$\Gamma(\mathcal{V}_i^\dagger,\mathcal{O}_{V^\dagger}) = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N}^{M-1},r\in\mathbf{Z}} a_{\underline{l},r}\underline{y}^{\underline{l}}y_i^r \mid \exists c>0 \colon \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},r}) \geq \frac{|\underline{l}|+|r|}{c}-1 \right\},$$

(où l'on a noté $u_{\underline{l}} = (l_1,\dots,\widehat{l_i},\dots,l_M)$),

$$\Gamma(\mathcal{U}_i,\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\infty)) = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N}^{M-1},r\in\mathbf{Z}} a_{\underline{l},r}\frac{\underline{u}^{\underline{l}}}{u_i^{|\underline{l}|}}\left(\frac{u_i}{u_0}\right)^r \mid \exists c>0 \colon \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},r}) - r/c \to +\infty \,\mathrm{si}\, |\underline{l}|+|r| \to +\infty \right\}.$$

La flèche λ envoie y_j, pour $j\neq 0$ vers u_j/u_0 et est bien définie ici une fois que l'on remarque que

$$\underline{y}^{\underline{l}}y_i = \frac{\underline{u}^{\underline{l}}}{u_i^{|\underline{l}|}}\,(u_i/u_0)^{|\underline{l}|+r}.$$

L'algèbre $\Gamma(V^\dagger,\mathcal{O}_{V^\dagger})$ est égale à la complété faible de l'algèbre des polynômes à M variables à coefficients dans V. Si une section s de $\Gamma(\mathcal{U}_i,\mathcal{O}(^\dagger*\infty))$ est une section sur $\mathcal{U}_o$, on voit qu'elle s'écrit

$$s = \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N}} a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}} \mid \exists c>0 \colon \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l}}) \geq |\underline{l}|/c - 1.$$

Ceci montre la proposition.

Nous aurons besoin des faits suivants. L'élément u_0^r avec $r\in\mathbf{Z}$ est une section globale de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\infty)(r)$ et induit un isomorphisme entre ce faisceau et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\infty)$.

Un calcul facile montre d'autre part que

$$\Gamma(\mathcal{U}_i,\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(n)) = \left\{ \sum a_{\underline{l}} \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{l_1}\dots\left(\frac{u_N}{u_0}\right)^{l_N} u_0^n \mid \mathrm{v}_p(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|-n) \,\mathrm{et}\, \mathrm{v}_p(a_{\underline{l}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \to \infty \,\mathrm{si}\, |\underline{l}| \to \infty \right\}$$

Notons $B = \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, $B' = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*\infty))$, $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(*\infty)$.

Proposition 3.4.1.1 *L'algèbre B' est une B-algèbre de type fini.*

Démonstration. Ce qui précède montre que cette assertion est vraie pour $\mathcal{Y}$. L'algèbre $\mathcal{B}'$ est un $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\infty)$-module de type fini de sorte que B' est un $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\infty))$-module de type fini et est donc une $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$-algèbre de type fini. A posteriori B' est une B-algèbre de type fini.

3.5 Algèbres de polynômes à coefficients surconvergents.

Dans cette partie, m est fixé et on pose $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$. On considère ici le faisceau d'algèbres

$$\mathcal{C} = \mathbf{S}_{\widehat{\mathcal{B}}}\left(\bigoplus_{1\leq i\leq s} \widehat{\mathcal{B}}(1)T_i\right),$$

Ces faisceaux forment un faisceau d'algèbres cohérent, comme en 4.1.1 de [5]. Remarquons tout de suite que

$$\mathcal{C} = \bigoplus_n \bigoplus_{\underline{\alpha}=n} \widehat{\mathcal{B}}(n)\underline{T}^{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(r) = \bigoplus_n \bigoplus_{\underline{\alpha}=n} \widehat{\mathcal{B}}(n+r)\underline{T}^{\underline{\alpha}}.$$

Finalement, les modules $\mathcal{C}(r)$ ont les mêmes propriétés cohomologiques que les modules $\widehat{\mathcal{B}}(r)$. Les conclusions de 3.3 s'appliquent donc aussi aux faisceaux de $\mathcal{C}$-modules cohérents.

Proposition 3.5.1 *i L'algèbre $C = \Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{C})$ est une $\widehat{B}$-algèbre de type fini.*

ii Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{C}$-modules cohérents, alors $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{E})$ est un C-module de type fini.

Remarquons que cette proposition est valable aussi pour

$$\mathcal{C} = \mathbf{S}_{\widehat{\mathcal{B}}}\left(\bigoplus_{1\leq i\leq s} \widehat{\mathcal{B}}T_i\right),$$

et pour les faisceaux cohérents sur cette algèbre. Nous ne donnerons pas la démonstration dans ce cas.

Démonstration. Etant donné les calculs précédents, on a

$$C = \left\{\sum_n \sum_{|\underline{\alpha}|=n} a_{\underline{l},\underline{\alpha}}\underline{y}^{\underline{l}}\underline{T}^{\underline{\alpha}} \,|\, \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},\underline{\alpha}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|-n)\,\mathrm{et}\,\mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},\underline{\alpha}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \to \infty\,\mathrm{si}\,|\underline{l}| \to \infty\right\},$$

$$C(r) = \left\{\sum_n \sum_{|\underline{\alpha}|=n} a_{\underline{l},\underline{\alpha}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^{n+r}\underline{T}^{\underline{\alpha}} \,|\, \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},\underline{\alpha}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|-n-r)\,\mathrm{et}\,\forall n, \mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l},\underline{\alpha}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \to \infty\mathrm{si}|\underline{l}| \to \infty\right\}.$$

On gradue $\mathcal{C}$ (resp. C(r)) de façon naturelle : une section locale a de $\widehat{\mathcal{B}}(1)T_i$ est homogène de degré 1.

Comme $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}(1))$ est un $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}})$-module de type fini, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est engendrée par les éléments homogènes de degré 1, ce que l'on va démontrer par récurrence sur le degré. Soit P un élément homogène de degré n de $\mathcal{C}$, tel que P s'écrive

$$P = \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}}.$$

Il existe un entier a tel que, si $|\underline{l}| \geq a$, $\mathrm{v}_\pi(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|)$. L'élément P se décompose ainsi

$$P = \sum_{|\underline{l}|<a} a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}} + \sum_{|\underline{l}|\geq a} a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}},$$

où le deuxième élément de cette somme est dans $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}})u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}}$. Il suffit finalement de vérifier que chaque $a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}}$, de degré n, est dans l'algèbre engendrée par les éléments homogènes de degré 1.

Prenons un tel élément $Q = a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^nT_{i,j}^{\underline{\alpha}}$. On suppose que $n \geq 2$. Si $|\underline{l}| = 0$, Q est directement produit d'opérateurs de degré 1. Si $|\underline{l}| \neq 0$, il existe un entier b tel que $l_b \neq 0$ et un couple (c,d) tels que $\alpha_{c,d} \neq 0$. L'élément Q s'écrit alors

$$Q = (a_{\underline{l}}\underline{y}^{\underline{l}-1_b}u_0^{n-1}T_{i,j}^{\underline{\alpha}-1_{c,d}})(y_bu_0T_{c,d}),$$

où $1_{c,d}$ est le multi-indice dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice c,d qui vaut 1 et 1_b est défini de façon analogue. Le premier élément de ce produit est dans C_{n-1} et le deuxième est dans C_1, ce qui achève la démonstration de (i).

Montrons (ii). Grâce aux remarques préliminaires, on se ramène à montrer que $C(r)$ est un C-module de type fini. Soit D le sous-module de $C(r)$ engendré par les éléments de degré 0 suivants

$$\{\pi^{\nu_m(|\underline{l}|-r)}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^r \text{ pour } |\underline{l}| \leq p^{m+1}+r\}.$$

On considère P un élément homogène de degré n de $C(r)$. On va montrer que tout élément homogène de degré n du type suivant est dans D. Soit

$$a = \pi^{\nu_m(|\underline{l}|-r-n)}\underline{y}^{\underline{l}}u_0^{n+r}\underline{T}^{\underline{\alpha}}.$$

Supposons d'abord que $|\underline{l}| < p^{m+1}+n+r$. Alors il existe une décomposition $\underline{l} = \underline{l}'+\underline{l}''$, tels que $\underline{l}' < p^{m+1}+n$ et $\underline{l}'' \leq r < p^{m+1}+r$. On voit que

$$a = \underline{y}^{\underline{l}'}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}} \cdot \underline{y}^{\underline{l}''}u_0^r \in C_n \cdot D.$$

Si on a l'inégalité $|\underline{l}| \geq p^{m+1}+n+r$, il existe une décomposition $\underline{l} = \underline{l}'+\underline{l}''$, tels que $|\underline{l}''|-r = p^{m+1}$. Ainsi, on trouve

$$a = (\pi^{\nu_m(|\underline{l}'|-n)}\underline{y}^{\underline{l}'}u_0^n\underline{T}^{\underline{\alpha}}) \cdot (\pi^{\nu_m(|\underline{l}''|-r)}\underline{y}^{\underline{l}''}u_0^r) \in C_nD.$$

Ce qui montre (ii).

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ soit munie d'une structure d'algèbre graduée, telle que les modules $\widehat{\mathcal{B}}(1)T_i$ soient contenus dans des composantes homogènes de degré $t_i \geq 1$. Introduisons $\tilde{\mathcal{C}}$ l'algèbre $\mathcal{C}$ munie de cette graduation. Notons D le maximum des degrés des modules $\widehat{\mathcal{B}}(1)T_i$. La composante homogène de degré n de $\mathcal{C}$ est somme directe de modules du type $\widehat{\mathcal{B}}(k)\underline{T}^{\underline{\alpha}}$ avec $\underline{t}\cdot\underline{\alpha} = n$ et $k \geq n/D$.

On dispose du résultat suivant concernant les $\tilde{\mathcal{C}}$-modules gradués.

Proposition 3.5.2 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\tilde{\mathcal{C}}$-modules cohérents gradués. Alors, $\forall k \geq 1$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\mathcal{F})$ est un V-module de type fini gradué, dont les composantes homogènes sont nulles en degré assez grand.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle donnée en 4.2.2. de [4]. Si $\mathcal{M}$ est un module gradué, $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_k$, nous convenons que $\mathcal{M}(r)$ est gradué par $\mathcal{M}(r) = \bigoplus \mathcal{M}_k(r)$, et si $i \in \mathbf{Z}$, nous notons $\mathcal{M}[i]$ le module gradué par $\mathcal{M}[i]_k = \mathcal{M}_{k+i}$. Il existe une résolution graduée de longueur N de $\mathcal{F}$ par des modules du type

$$\mathcal{G}_i = \bigoplus_{j=1}^{s_t}\mathcal{C}(-r_t)[\alpha_j^t].$$

De cette résolution, on peut extraire une résolution de $\mathcal{F}_n$, de longueur N, par les modules du type $\bigoplus \mathcal{C}_{n+\alpha_j^t}(-r_t)$. Soit

$$M = max_{0\leq t\leq N, 1\leq j\leq s_t}\{(1+r_t)p^m - \alpha_j^t\}.$$

Pour $n \geq M$, $\mathcal{F}_n$ a une résolution de longueur N par des modules acycliques pour le foncteur $\Gamma(\mathcal{Y},.)$. Ceci implique que $\forall k \geq 1$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\leq n_0} \mathrm{H}^k(\mathcal{Y},\mathcal{F}_n)$, et l'assertion, puisque les faisceaux $\mathcal{F}_n$ sont des faisceaux de $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m')i}$-modules cohérents.

3.6 Cohomologie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-modules cohérents.

Cette fois, nous donnons le résultat sur $\mathcal{X}$: nous voulons montrer que les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-modules cohérents sont acycliques pour le foncteur sections globales et engendrés par leurs sections globales. En remarquant que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-module cohérent, on voit qu'on est ramené à un résultat sur $\mathcal{Y}$. Fixons un entier m.

Proposition 3.6.1 *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-module cohérent (resp. un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$-module cohérent), alors $\mathcal{E}$ est acyclique pour le foncteur sections globales et admet une résolution libre de rang fini sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$ (resp. sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$).*

Démonstration. Nous commençons par montrer l'énoncé dans le cas de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$. Du fait que le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$ est limite inductive de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-modules cohérents et que l'espace topologique $\mathcal{Y}$ est noethérien, il existe un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}} \mathcal{F}.$$

D'après le résultat de P. Berthelot dans [4], $\mathcal{F}$ admet une résolution globale sur $\mathcal{Y}$ par des modules somme directe de modules du type $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(r)$. En tensorisant par $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$, qui est plat sur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$, on trouve une résolution de $\mathcal{E}$ par des modules du type $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})(r)$, dont on a vu qu'ils étaient isomorphes à des modules libres. Cela montre la deuxième partie du lemme et nous ramène à montrer la première partie du lemme dans le cas du module libre $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$

Par définition, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z}) &= \varinjlim_{n\geq 0} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-n),\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}) \\ &= \varinjlim_{n\geq 0} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(n).\end{aligned}$$

La cohomologie commute à la limite inductive sur $\mathcal{Y}$ qui est un espace topologique noethérien. L'acyclicité du faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$ résulte donc de l'acyclicité des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(n)$ pour tout $n \geq 0$ (cf [4]).

Maintenant, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-module cohérent, il existe un entier m et un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(*\mathcal{Z})} \mathcal{F}.$$

Cela permet d'écrire $\mathcal{E}$ comme limite inductive de faisceaux acycliques pour Γ. On en déduit que $\mathcal{E}$ lui-même est acyclique pour Γ. En écrivant $\mathcal{F}$ comme quotient d'un module libre de rang fini, on voit que $\mathcal{E}$ est aussi quotient d'un module libre, ce qui permet de proche en proche de construire une résolution libre de rang fini de $\mathcal{E}$.

Remarque. La même démonstration donne le même résultat pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(*\mathcal{Z})$-modules cohérents.

3.7 Comparaison entre les faisceaux structuraux dans le cas de l'espace projectif.

Nous reprenons ici les notations précédentes. L'algèbre $A = \Gamma(V^\dagger,\mathcal{O}_{V^\dagger})$ est la complétée faible de l'algèbre de Weyl de dimension N et est en particulier noethérienne. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{V^\dagger}$-module de présentation finie sur $V^\dagger$

$$\mathcal{O}_{V^\dagger}^a \to \mathcal{O}_{V^\dagger}^b \to \mathcal{E} \to 0.$$

Cette présentation donne lieu à une présentation de $\Gamma(V^\dagger,\mathcal{E})$

$$A^a \to A^b \to \Gamma(V^\dagger,\mathcal{E}) \to 0.$$

On en déduit une présentation du module $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*(\mathcal{Z})) \otimes_A \Gamma(V^\dagger,\mathcal{E})$. D'après les résultats d'acyclicité qui précèdent, on voit que les sections globales du faisceau $\mathcal{F}$ s'identifient canoniquement à $\Gamma(V^\dagger,\mathcal{E})$. De la même façon, si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*(\mathcal{Z}))$-modules cohérents, les sections globales du faisceau $\mathcal{O}_{V^\dagger} \otimes_A \mathcal{E}$ s'identifient canoniquement aux sections globales de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{Y}$.

Tout ceci nous permet d'énoncer la proposition

Proposition 3.7.1 *Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{V^\dagger}$ (resp. un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\infty)$, module cohérent), on pose $\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{^\dagger*\mathcal{Y}}(\infty)\otimes_A\Gamma(V^\dagger,\mathcal{E})$ (resp. $\psi(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{V^\dagger}\otimes_A\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{E})$). Ces deux flèches définissent une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}_{V^\dagger}$-modules cohérents et les $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\infty)$-modules cohérents.*

Pour obtenir un résultat analogue sur $\mathcal{X}$, il sera utile de préciser cette équivalence de catégories par la proposition qui suit.

Proposition 3.7.2 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{Y^\dagger}$-modules cohérents. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\varphi(\mathcal{E}_{|V^\dagger}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \widehat{\mathcal{E}}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme canonique entre les sections globales de ces deux faisceaux. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module, nous noterons

$$\mathcal{F}(\infty) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(^\dagger*\mathcal{Z}).$$

Partons de la flèche canonique de passage aux complétés μ

$$\Gamma(V^\dagger,\mathcal{E}_{|V^\dagger}) \to \Gamma(\mathcal{V},\widehat{\mathcal{E}}).$$

La restriction $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{E}}(\infty)) \to \Gamma(\mathcal{V},\widehat{\mathcal{E}})$ est injective d'après les résultats de 2.2 et nous allons montrer que μ est en fait à valeurs dans $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{E}}(\infty))$. Les trois foncteurs considérés $\mathcal{E} \mapsto \Gamma(V^\dagger,\mathcal{E}_{|V^\dagger})$, $\mathcal{E} \mapsto \Gamma(\mathcal{V},\widehat{\mathcal{E}})$, et $\mathcal{E} \mapsto \Gamma(\mathcal{V},\widehat{\mathcal{E}})$ sont exacts. Comme $\mathcal{E}$ est un quotient d'un faisceau

$\mathcal{O}_{Y^\dagger}(-r)^a$ pour un certain couple $(r,a) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, il suffit de montrer que μ est à valeurs dans $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{E}}(\infty))$, pour $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{Y^\dagger}(r)$, pour tout $r \in \mathbf{Z}$. Comme le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\infty)(r)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\infty)$ via la multiplication par u_0^r, les flèches considérées correspondent dans ce cas à l'inclusion canonique de $u_0^r A$ dans $\widehat{A}$, de sorte que μ est un isomorphisme.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de comparaison pour les faisceaux structuraux dans le cas d'un schéma projectif muni d'un diviseur ample.

3.8 Comparaison des faisceaux structuraux pour les schémas projectifs.

Soit $X^\dagger$ un schéma projectif, $Z^\dagger$ un diviseur de Cartier relatif sur $X^\dagger$, $U^\dagger = X^\dagger \backslash Z^\dagger$, $X^\dagger \to Y^\dagger$ un plongement dans un espace projectif donné par $Z^\dagger$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{Y^\dagger}$ définissant l'immersion de $X^\dagger$ dans $Y^\dagger$ et $\widehat{\mathcal{I}}$ son complété π-adique, qui définit l'immersion de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Nous désignerons par $\widehat{\mathcal{I}}({}^\dagger{*}\infty)$ le faisceau

$$\widehat{\mathcal{I}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\infty).$$

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$ s'identifie alors au faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\infty)/\widehat{\mathcal{I}}({}^\dagger{*}\infty)$. La proposition précédente appliquée à $\mathcal{O}_{X^\dagger}$ et les énoncés d'acyclicité déjà cités donnent alors que l'algèbre $\Gamma(U^\dagger,\mathcal{O}_{U^\dagger})$ est égale à l'algèbre de sections globales $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}))$. Notons B cette algèbre. Cette algèbre est noethérienne et est égale respectivement à $\Gamma(U^\dagger,\mathcal{O}_{V^\dagger})/\Gamma(V^\dagger,\mathcal{I})$ et à $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}))/\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{I}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}))$. Cette algèbre est f. complète car elle c'est l'algèbre des sections globales d'un schéma f. formel affine. La proposition précédente implique aussi que $\varphi(\mathcal{O}_{X^\dagger}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$ et que $\psi(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})) = \mathcal{O}_{X^\dagger}$.

De plus, si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{U^\dagger}$-modules cohérents (resp. de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-modules cohérents), $\mathcal{E}$ est aussi un faisceau de $\mathcal{O}_{V^\dagger}$-modules cohérent (resp. un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-modules cohérent). Il résulte alors des observations précédentes que

$$\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}) \otimes_B \Gamma(U^\dagger,\mathcal{E})$$

$$(\text{resp.} \quad \psi(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{U^\dagger} \otimes_B \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})).$$

On obtient ainsi

Proposition 3.8.1 *Soit $X^\dagger$ un schéma f. formel projectif et $Z^\dagger$ un diviseur ample sur $X^\dagger$. Les foncteurs φ et ψ définissent une équivalence de catégories naturelle entre d'une part les faisceaux de $\mathcal{O}_{U^\dagger}$-modules cohérents et d'autre part les faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z})$-modules cohérents.*

4 Théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels.

4.1 Hypothèses et notations.

Dans toute cette partie $X^\dagger$ est un schéma f. formel lisse sur $\mathcal{S}$, Z est un diviseur ample sur X_0, vérifiant les hypothèses de relevabilité de 3.1. Pour la question qui nous intéresse, on peut donc supposer que Z se relève sur $X^\dagger$ en un diviseur relatif ample sur $X^\dagger$, $Z^\dagger$. Soit $U^\dagger$

l'ouvert $X^\dagger\backslash Z^\dagger$. Les lettres $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ sont les schémas obtenus en complétant formellement les schémas précédents. On se propose de montrer qu'il y a une correspondance naturelle entre les $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents. Comme nous l'avons remarqué en 3.1, il suffit de montrer cet énoncé dans le cas où le diviseur Z se relève en un diviseur ample sur $X^\dagger$.

Comme il a été montré en 2.7.3, il existe une flèche canonique injective

$$\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger} \hookrightarrow \mathcal{D}^\dagger({}^\dagger{*}\mathcal{Z}),$$

d'où une flèche λ

$$\Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})).$$

Comme les deux faisceaux d'opérateurs différentiels vérifient un théorème A, pour comparer les $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents, il suffit de montrer que λ est un isomorphisme. Dans cette partie, nous construisons un inverse à l'application λ en utilisant (2.7.3) que les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$ et $\mathcal{O}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ se correspondent dans l'équivalence de catégories décrite en 2.3.2. L'un des points clefs est de comparer les sections globales des complétés faibles des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ avec les complétés faibles des sections globales de ces mêmes faisceaux, ce qui est assez ardu. En fait nous comparons les objets similaires pour des faisceaux analogues aux faisceaux $\mathcal{E}^{(m)}$ construits en 3 de [5] et qui ont la propriété de constituer une bonne approximation du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger\mathcal{Z})_{\mathbf{Q}}$, en un sens qui sera précisé ultérieurement.

Nous commençons par donner la construction et les propriétés des "nouveaux" faisceaux $\mathcal{E}^{(m)}$. Pour ces faisceaux nous pouvons comparer les sections globales des complétés faibles à la complétion faible des sections globales. Cette comparaison nous permet de conclure et de construire un inverse à l'application λ.

4.2 Enoncés d'acyclicité pour certains faisceaux d'opérateurs différentiels sur les schémas formels.

Dans cette partie, nous considérons de nouveau un schéma formel $\mathcal{X}$, muni d'un diviseur de Cartier, relatif, ample $\mathcal{Z}$ et on introduit les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Nous allons rappeler une condition suffisante sur un faisceau $\mathcal{E}$ de $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbres pour que $\mathcal{X}$ soit $\mathcal{E}$-affine, et raffiner cette condition pour avoir des informations plus précises sur les sections globales de $\mathcal{E}$.

Donnons d'abord les résultats de 4 de [5] en les complétant. Commençons par quelques définitions. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel et $\mathcal{D}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres cohérent sur $\mathcal{X}$.

Définition 4.2.1 *On dit que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}$-affine si*

i (Théorème A) L'anneau $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D})$ est cohérent et il existe une équivalence de catégories naturelle entre les $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D})$-modules cohérents et les $\mathcal{D}$-modules cohérents donnée dans un sens par le foncteur sections globales.

ii (Théorème B) Pour tout $\mathcal{D}$-module cohérent M, et tout $k \geq 1$, $\mathrm{H}^k(X,M)$ est nul.

Dans 4 de [5], on montre le résultat suivant (formulé pour un faisceau particulier)

Proposition 4.2.2 *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-A.O.D., f un morphisme fini de faisceaux d'algèbres $\mathcal{A} = \mathbf{S}_{\widehat{\mathcal{B}}}(\bigoplus_i \widehat{\mathcal{B}}T_i) \to \mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$, telle que $f(T_i)$ est homogène. Alors $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents et $\mathcal{X}$ est $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$-affine.*

Dans l'énoncé la somme directe est finie. Le fait que $\mathcal{E}$ soit un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérent implique que $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérent.

Nous raffinons ce résultat grâce à l'énoncé suivant

Proposition 4.2.3 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-A.O.D.. Soient $n_i \geq 1$ des entiers en nombre fini, f un morphisme fini de faisceaux d'algèbres de $\mathcal{A} = \mathbf{S}_{\widehat{\mathcal{B}}}(\bigoplus_i \widehat{\mathcal{B}}(n_i)T_i)$ vers $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$, qui fait de $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$ une $\mathcal{A}$-algèbre cohérente, et telle que l'image par f d'une section locale de $\widehat{\mathcal{B}}(n_i)T_i$ est un élément homogène de degré ≥ 1. Alors $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents, $\mathcal{X}$ est $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$-affine et $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ est une $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{B})$-A.O.D.*

Démonstration. Nous ne montrons pas la première partie de la proposition qui découle de la proposition précédente. Nous montrons seulement le résultat sur les sections globales.

Pour les calculs, nous simplifions l'énoncé comme suit. Reprenons les notations de 3.4. Il existe des surjections, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}^{N+1} & \to & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(k) \\ (t_l) & \mapsto & \sum_{l=0}^{N} t_l u_l^{k-1}. \end{array}$$

On peut donc finalement supposer dans l'énoncé de la proposition que tous les n_i sont égaux à 1.

Notons

$$\mathcal{C} = \mathbf{S}_{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}}(\bigoplus_i \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}(1)T_i),$$

graduée par le fait qu'une section locale s d'un facteur $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}(1)T_i$ est homogène de degré $deg(f(s)$, et $\widehat{B} = \Gamma(X,\widehat{\mathcal{B}})$. Par définition, $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$ est une $\mathcal{C}$-algèbre graduée et $\mathcal{C}$ est en fait une algèbre $\tilde{\mathcal{C}}$ comme dans 3.5.2.

Le faisceau $\mathcal{E}$ est filtré par des sous-faisceaux $\mathcal{E}_n$. Posons $E = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$, il existe une filtration croisante exhaustive de $\mathcal{E}$ par des sous-$\widehat{B}$-modules $E_n = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$. Montrons d'abord que $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$ est une algèbre de type fini sur $\widehat{B}$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme d'algèbre suivant.

Lemme 4.2.3.1 *Soit C une algèbre et A une C-algèbre graduée, de type fini, engendrée par des éléments homogènes $z_{i,j}$ de degré $i \leq d$. Soit e un entier $\geq d$. Alors tout élément homogène de degré $\geq e$ est dans la C-algèbre engendrée par les éléments homogènes*

$$\prod z_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \mid e \leq \sum i\alpha_{i,j} \leq 2e + d.$$

Démonstration. Soit $y \in A$. On procède par récurrence sur le degré de y, en supposant que y se met sous la forme $y = \prod z_{i,j}^{\alpha_{i,j}}$, avec $\sum i\alpha_{i,j} \geq 2e + d + 1$. Soit

$$I = \{(i,j) \mid \alpha_{i,j} \neq 0\}.$$

L'ordre lexicographique induit un ordre total sur I. Si $J \subset I$, on pose

$$n(J) = \sum_{(i,j)\in J} i\alpha_{i,j}.$$

On dit qu'une partie J de I est pleine si $min(I) \in J$ et si J contient tous les multi-indices de I compris entre $min(I)$ et $max(J)$. L'ensemble des parties pleines de I est noté $P(I)$. On considère maintenant

$$n_0 = min\left\{n(J) :\ J \in P(I)\ \text{et}\ n(J) \geq e\right\}.$$

Cet entier est bien défini car $e > d$. Observons que

$$e \leq n_0 < e + d \leq 2e + d < n(I).$$

Cet entier n_0 correspond à une sous-partie I_0 de I, distincte de I. On pose alors

- $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}$ si $(i,j) \in I_0$,
- $\beta_{i,j} = 0$ si $(i,j) \in I\backslash I_0$.

Pour conclure la démonstration du lemme, il suffit alors d'observer que

- $e \leq \sum i\beta_{i,j} < e + d$,
- $e \leq \sum i(\alpha_{i,j} - \beta_{i,j}) < \sum i\alpha_{i,j}$.

Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

Proposition 4.2.3.2 *i L'algèbre graduée* $\mathrm{gr}_\bullet E$ *est une* $\widehat{B}$*-algèbre de type fini.*

ii L'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E})$ *est une* $\mathrm{gr}_\bullet E$*-algèbre finie.*

Démonstration. Pour montrer (i) et (ii), il faut comparer l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet E$ à l'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E})$. On dispose de suites exactes de $\widehat{\mathcal{B}}_\mathcal{X}$-modules cohérents

$$0 \to \mathcal{E}_{n-1} \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1} \to 0,$$

pour tout $n \geq 1$. Cela nous donne des suites exactes

$$0 \to E_{n-1} \to E_n \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_{n-1}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1}).$$

Les modules $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_{n-1})$ et $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$ sont des V-modules de type fini de torsion. D'autre part, l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$ est une $\tilde{\mathcal{C}}$-algèbre finie graduée, de sorte que les groupes $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1})$ sont nuls pour n supérieur à un certain n_0 (3.5.2). Pour $n \geq n_0$, la suite des cardinaux des groupes $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$ est décroissante, et est donc stationnaire, cela revient à dire que la suite des groupes est stationnaire à partir de $n \geq n_1$ et que la flèche $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_{n-1}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$ est un isomorphisme pour $n \geq n_1$. Ainsi on a un isomorphisme

$$\bigoplus_{n\geq n_1} \mathrm{gr}_n E \simeq \bigoplus_{n\geq n_1} \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1}).$$

On trouve alors une famille de générateurs de $\mathrm{gr}_\bullet E$ en prenant une famille génératrice de $\bigoplus_{n<n_1} \mathrm{gr}_n E$ comme $\widehat{B}$-module et en lui adjoignant la famille des

$$\prod z_{i,j}^{\alpha_{i,j}},\ n_1 \leq \sum i\alpha_{i,j} \leq 2n_1 + d,$$

décrite dans l'énoncé du lemme précédent.

Soit C_n le noyau de la flèche $\mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_{n-1}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$. Par construction, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{gr}_\bullet E \to \Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}) \to \bigoplus_n C_n \to 0.$$

Cela permet de munir $\bigoplus_n C_n$ d'une structure de $\mathrm{gr}_\bullet E$-module, de type fini, car ce module est un V-module de type fini. Comme l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet E$ est noethérienne, cela entraîne que l'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E})$ est finie sur $\mathrm{gr}_\bullet E$.

Nous terminons par un résultat qui nous permet de comparer les sections globales des complétions faibles de faisceaux vérifiant les hypothèses de la proposition précédente aux complétions faibles des sections globales de ces faisceaux.

Proposition 4.2.4 *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-A.O.D vérifiant les hypothèses de la proposition précédente et tel qu'il existe des surjections,*

$$\widehat{\mathcal{B}} \otimes_{\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}})} \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}) \to \mathcal{E},$$

$$\widehat{\mathcal{B}} \otimes_{\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}})} \Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}) \to \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}.$$

Alors il existe un isomorphisme canonique

$$E^\dagger_{\mathbf{Q}} \simeq \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger_{\mathbf{Q}}).$$

L'on sait déjà (1.4.1) qu'il y a une injection $E^\dagger \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^\dagger)$.

D'après la proposition précédente, l'algèbre $E = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ est une algèbre de $\widehat{B}$-A.O.D.. Il résulte de la deuxième surjection qu'une famille saturée $\underline{x}$ d'éléments de $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ définit une famille saturée du faisceau $\mathcal{E}$ sur tout ouvert de $\mathcal{X}$. On peut utiliser cette famille pour construire à la fois la complétion faible de E comme $\widehat{B}$-algèbre et la complétion faible de $\mathcal{E}$ comme $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbre. Soit l un entier. Introduisons les modules $E_{\underline{x},l}$ et les faisceaux $\mathcal{E}_{\underline{x},l}$ (notés ici E_l et $\mathcal{E}_l$). comme en 1.3.4 et en 1.4.3. Comparons d'abord E_l et les sections globales de $\mathcal{E}_l$.

Proposition 4.2.4.1 *L'algèbre E_l est noethérienne et le morphisme canonique*

$$\alpha \colon E_l \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l),$$

fait de $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)$ un E_l-module de type fini.

L'existence de α est claire par définition des algèbres E_l et $\mathcal{E}_l$. Il est aussi clair que α est filtré pour la filtration définie sur E_l et $\mathcal{E}_l(\mathcal{U})$ en 1.3.4.6. Ces filtrations sont croissantes et exhaustives et il suffit finalement de montrer que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)$ est un $\mathrm{gr}_\bullet E_l$-module de type fini. Comme cette première algèbre est une sous-algèbre de l'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}_l)$, on est finalement ramené à montrer que l'algèbre $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}_l)$ est un module de type fini sur $\mathrm{gr}_\bullet E_l$. D'après 1.3.4.6, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet E_l$ est une $\widehat{B}$-algèbre de type fini engendrée par les classes des éléments $\xi \underline{x}_{\underline{j}}$ pour $|\underline{j}| \leq l$, il en est de même pour le faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbres graduées $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}_l$. Soit $\mathcal{C}$ l'algèbre de polynômes à coefficients dans $\widehat{\mathcal{B}}$, $\widehat{\mathcal{B}}[T_{\underline{j}}]_{|\underline{j}|\leq l}$, et

$C = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{C}) = \widehat{B}[[T_{\underline{j}}]]_{|\underline{j}|\leq l}$. En envoyant $T_{\underline{j}}$ sur la classe de $\xi \underline{x}_{\underline{j}}$, on fait de $\mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}_l$ un faisceau de $\mathcal{C}$-modules cohérents et on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B}[\underline{T}] & \simeq & \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}[\underline{T}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}_{\bullet}E_l & \to & \Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}_l), \end{array}$$

où la première flèche verticale est surjective. D'après 3.5.1, le module $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}_l)$ est de type fini sur C, ce qui conclut la démonstration de la proposition.

Remarquons au passage que les faisceaux $\mathcal{E}_l$ vérifient à leur tour les hypothèses de 4.2.2. En particulier, ce sont des faisceaux cohérents et $\mathcal{X}$ est $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$-affine.

Nous sommes désormais en mesure de montrer la proposition. Pour comparer $E^{\dagger}$ et $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^{\dagger})$, nous passons par l'intermédiaire des modules $\tilde{E}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ (1.3.3). Posons $\widehat{F}_l = Im(\widehat{E}_l \to \widehat{E})$, $\widehat{\mathcal{F}}_l = Im(\widehat{\mathcal{E}}_l \to \widehat{\mathcal{E}})$, de sorte que $E^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$ s'identifie à $\varinjlim_l \widehat{F}_{l,\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$ à $\varinjlim_l \widehat{\mathcal{F}}_{l,\mathbf{Q}}$. Comme le schéma formel $\mathcal{X}$ est un espace topologique noethérien on voit que

$$\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}) \simeq \varinjlim_l \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{F}}_{l,\mathbf{Q}}).$$

On dispose de flèches évidentes $E_l \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)$, qui induisent des flèches $\widehat{E}_l \to \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{E}}_l)$. Par définition des objets intervenant on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{E}_l & \to & \widehat{F}_l & \subset & \widehat{E} \\ g\downarrow & & & & S\downarrow \\ \widehat{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)} & \to & \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{F}}_l) & \subset & \widehat{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})}, \end{array}$$

dont la dernière flèche verticale est un isomorphisme, et dont la première flèche horizontale est surjective (par exactitude de la complétion p-adique dans le cas noethérien). On voit ainsi que l'on a une flèche canonique h (injective) de $\widehat{F}_l$ dans $\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{F}}_l)$. Le module $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)$ est un E_l-module de type fini. D'autre part, le faisceau $\mathcal{E}_{l,\mathbf{Q}}$ s'identifie à $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ et $E_{l,\mathbf{Q}}$ à $E_{\mathbf{Q}}$. L'application $E_l \to \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)$ est donc un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Comme E_l est une algèbre noethérienne complète, on peut appliquer la conclusion du lemme de 1.3.4.8, et on voit que l'on a un isomorphisme canonique

$$\widehat{E}_{l,\mathbf{Q}} \simeq \widehat{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_l)}_{\mathbf{Q}}.$$

Comme $\mathcal{X}$ est $\widehat{\mathcal{E}}_{l,\mathbf{Q}}$-affine, on a une surjection canonique

$$\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{E}}_l)_{\mathbf{Q}} \to \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{F}}_l)_{\mathbf{Q}}.$$

Si l'on reporte ces informations dans le diagramme précédent, on voit que la flèche $h_{\mathbf{Q}}$ est surjective et que c'est un isomorphisme. On en déduit l'énoncé.

4.3 Un exemple de bons faisceaux d'opérateurs différentiels approchant le faisceau défini par Berthelot.

La construction que nous utilisons ici est une modification de la construction effectuée dans 3 de [5]. Nous reprenons le schéma de cette construction. Un des inconvénients de cette construction est qu'elle ne permet pas de dégager de structure intéressante pour l'algèbre des sections globales de $\mathcal{E}$. En particulier, on voudrait que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ soit une $\widehat{B}$-algèbre de type fini. Pour obtenir des informations de ce point de vue il est nécessaire de raffiner la construction qui est faite en [5], afin que l'hypothèse de 4.2.3 concernant l'algèbre graduée soit satisfaite.

4.4 Construction de faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}$-A.O.D approchant le faisceau des opérateurs différentiels de Berthelot.

4.4.1 Définition des algèbres $\mathcal{E}$.

Fixons un entier m et un entier m' tels que les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$ soient engendrés par leurs sections globales à π-près, pour tout $m'' \geq m'$, et tout $n \leq p^m$, c'est-à-dire que l'on dispose de suites exactes

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')}(1) \otimes_{\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')})} \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}(-1)) \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m'')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)} \to \mathcal{K} \to 0,$$

où $\pi\mathcal{K} = 0$.

Notons $\xi = \pi^{N+2}$, $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$, $\widehat{B} = \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')})$, $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$, $\mathcal{D}_n = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$, $D_n = \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}(-1))$,

$$D'_n = \sum_{k=1}^{N} u_k \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}(-1)) \subset \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}),$$

$$\Delta'_n = \xi^n D'_n.$$

Nous pouvons alors donner la définition des préfaisceaux $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert. On définit $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ comme la sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre engendrée par les Δ'_i pour $i \leq p^m$. Ces données définissent un préfaisceau que nous noterons $\mathcal{A}$.

Nous établissons maintenant une liste de propriétés pour ces faisceaux $\mathcal{A}$ tout à fait analogues à celles des faisceaux $\mathcal{A}$ construits en 3 de c[5]. Commençons par simplifier l'expression de $\mathcal{A}$ dans le cas d'un ouvert affine. Pour un tel ouvert on note $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ le sous $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ engendré par les produits $P_1 \dots P_s$ où $s \in \mathbf{N}$ et $P_i \in \Delta'_1 \bigcup \dots \bigcup \Delta'_{p^m}$. On a alors le fait suivant

Proposition 4.4.1.1 *Si $\mathcal{U}$ est affine, $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \mathcal{R}(\mathcal{U})$.*

Démonstration. Comme en 3.1.2.1 de [5], le lemme clef consiste à montrer que si $i \leq p^m$, alors $[\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}),\Delta'_i] \subset \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\Delta'_{i-1}$.

Soient $(b,Q) \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \times \Delta'_j$. Il existe $P \in D'_i$ tel que $Q = \xi^i P$. Le commutateur $[b,P]$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{U}$ d'ordre $\leq i-1$, de sorte que $\xi^{i-1}\pi[b,P] \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})D'_{i-1}$ et $\xi^i \pi[b,P] \in \pi^{N+1}\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\Delta'_{i-1}$, ce qui montre l'assertion.

On définit alors le préfaisceau d'algèbres $\mathcal{E}$ comme le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{A}$. Ce faisceau sera noté $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$ lorsque nous voudrons tout préciser.

4.4.2 Filtration des faisceaux $\mathcal{E}$.

Toujours comme dans [5] il est possible de munir les faisceaux $\mathcal{E}$ d'une filtration de $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbres. Commençons par munir le préfaisceau $\mathcal{A}$ d'une filtration d'algèbres. Soit n un entier. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ on introduit $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ le sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ engendré par

$$\left\{P_1\cdots P_s,\, s\in\mathbf{N}, \forall i\leq s, P_i\in\Delta'_{r_i} \text{ et } |\underline{r}|\leq n\right\}.$$

Le préfaisceau $\mathcal{A}_n$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{A}_{n+1}$ et $\mathcal{A}_0$ s'identifie au faisceau $\widehat{\mathcal{B}}$. D'autre part, $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n'}\subset\mathcal{A}_{n+n'}$, de sorte que $\mathcal{A}$ est ainsi muni d'une filtration de $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbres.

En utilisant la proposition précédente, on peut simplifier la description des $\mathcal{A}_n$.

Proposition 4.4.2.1 *Sur un ouvert affine $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ est le sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module engendré par l'ensemble des produits $P_1\cdots P_s$ tels que $\forall i\leq s$,$P_i\in\Delta'_i$ et $|\underline{r}|\leq n$.*

Soit maintenant $\mathcal{E}_n$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{A}_n$. Les faisceaux $\mathcal{E}_n$ forment une filtration croissante et exhaustive du faisceau $\mathcal{E}$.

Proposition 4.4.2.2 *Comme faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules, les faisceaux $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}$ sont engendrés par leurs sections globales.*

Démonstration. Comme les foncteurs Γ et $\otimes$ commutent à la limite inductive, il suffit de vérifier que les faisceaux $\mathcal{E}_n$ sont engendrés par leurs sections globales. Par définition, pour tout ouvert affine $\mathcal{U}$, on dispose de flèches surjectives

$$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\otimes_{\widehat{B}}\bigoplus_{s\leq n}\bigoplus_{|\underline{r}|=n}\Delta'_{r_1}\ldots\Delta'_{r_s}\to\mathcal{A}_n(\mathcal{U}).$$

En passant aux faisceaux associés, cela donne une flèche surjective f qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\widehat{\mathcal{B}}\otimes_{\widehat{B}}\bigoplus_{s\leq n}\bigoplus_{|\underline{r}|\leq n}\Delta'_{r_1}\ldots\Delta'_{r_s} & \xrightarrow{f} & \mathcal{E}_n\\ \downarrow & \nearrow t & \\ \widehat{\mathcal{B}}\otimes_{\widehat{B}}\mathcal{E}_n(\mathcal{X}). & & \end{array}$$

La surjectivité de f entraîne alors celle de t.

Un point essentiel est de remarquer que l'algèbre graduée associée à la filtration par les $\mathcal{E}_n$ est commutative. Comme dans [5], ce résultat repose sur la proposition suivante.

Proposition 4.4.2.3 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert affine muni de coordonnées locales, i,$j\leq p^m$, alors $[\Delta'_i,\Delta'_j]\subset\mathcal{A}_{i+j-1}(\mathcal{U})$.*

Démonstration. Soient $(P,Q)\in\Delta'_i\times\Delta'_j$ tels que $P=\xi^iP'$ et $Q=\xi^jQ'$ où $P'\in D'_i,Q'\in D'_j$. Le commutateur $[P',Q']$ est dans $\mathcal{D}_{i+j-1}(\infty)(\mathcal{U})$ et est donc égal à une somme d'opérateurs, produits de au plus $N+2$ opérateurs d'ordre $\leq p^m$. On a donc une décomposition

$$\pi^{N+2}[P',Q']=\sum_{\underline{k}=N+2}b_{\underline{k}}P_{k_1}\cdots P_{k_s},$$

où $b_{\underline{k}}\in\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, $P_{k_i}\in\mathcal{D}_{r_i}(\infty)$ et $|\underline{r}|\leq i+j-1$. On sait que $\pi P_{k_i}\in\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})D'_{r_i}$, de sorte que

$$\pi^{N+2}[P',Q']\in\sum_{|\underline{r}|\leq i+j-1}\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})D'_{r_1}\cdots\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})D'_{r_s}.$$

Ainsi,

$$\xi^{i+j}[P',Q'] \in \sum_{|\underline{r}|\leq i+j-1} \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\Delta'_1 \cdots \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\Delta'_{r_s},$$

et cela montre la proposition.

Soit $E_n = \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}_n)$. Les E_n forment une filtration d'algèbre de E, croissante et exhaustive.

Corollaire 4.4.2.4 *i Les algèbres graduées* $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}$ *et* $\mathrm{gr}_\bullet E$ *sont commutatives.*

ii Il existe une surjection canonique de faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}$*-algèbres commutatives*

$$\widehat{\mathcal{B}} \otimes_{\widehat{B}} \mathrm{gr}_\bullet E \to \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}.$$

Démonstration. Le fait que $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E}$ soit un faisceau d'algèbres commutatives découle de la proposition précdente. Des suites exactes

$$0 \to \mathcal{E}_{n-1} \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n-1} \to 0,$$

on déduit que $\mathrm{gr}_\bullet E$ est une sous-algèbre de $\Gamma(\mathcal{X},\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{E})$, et est commutative. La surjection du (ii) provient des surjections $\widehat{\mathcal{B}} \otimes E_n \to \mathcal{E}_n \to 0$.

4.4.3 Système inductif des faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$.

Dans cette partie, on ramifie la situation. On note $V^{(k)} = V[X]/X^{p^k} - \pi$, π_k une uniformisante de $V^{(k)}$, $A = \varinjlim V^{(k)}$, $\mathcal{X}^{(k)} = \mathrm{Spf} V^{(k)}$, f_k les premières projections, pour $l \geq k$, $f_{l,k} \colon \mathcal{X}^{(l)} \to \mathcal{X}^{(k)}$, $\Sigma = \mathrm{specA}$, $\tilde{\mathcal{X}} = X \times_{\mathcal{S}} \Sigma$ et $\varphi_k \colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}^{(k)}$, les deuxièmes projections. On explique ici pourquoi les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ forment un système inductif, pour m', m et k variables.

Pour comparer les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ au faisceau $A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$, on introduit les faisceaux complétés p-adiques $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ et

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)} = Im(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m')} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m)}).$$

Les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ sont cohérents et à sections noethériennes sur les affines, par les mêmes arguments que ceux développés en 3.2.2.2 de [5]. Il en va de même des faisceaux $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$, et qui sont bien sûr p-adiquement complets. Ce sont en fait ces faisceaux $\varphi_k^{-1} \widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ qui constituent un sytème inductif.

Soit Ω l'ensemble des triplets (m',m,k) tels que les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(k)},n}^{(m)}$ soient engendrés par leurs sections globales à π_k près. On ordonne Ω en posant :

$$(m'_2,m_2,l) \geq (m'_1,m_1,k) \text{ si } m'_2 \geq m'_1, m_2 \geq m_1, l \geq k.$$

On se propose maintenant de montrer

Proposition 4.4.3.1 *Les faisceaux* $\varphi_k^{-1} \widehat{\mathcal{F}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m',m)}$ *forment un système inductif indexé par* Ω.

Démonstration. Soient $(m'_2,m_2,l) \geq (m'_1,m_1,k)$ des triplets d'éléments de Ω. On note $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les préfaisceaux d'opérateurs différentiels construits à partir de ces données sur $\mathcal{X}^{(k)}$ et $\mathcal{X}^{(l)}$ respectivement. Comme les morphismes $f_{l,k}$ sont finis et plats les faisceaux $f_{l,k}^* \mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m)}$

s'identifient à $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$. D'autre part, d'après 5.2.1 de [5], il existe un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux $f_{l,k}^{-1}\widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m'_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$. Finalement, on dispose, pour tout i, d'applications $\Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}})$-linéaires

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\infty)(-1)) \to \Gamma(\mathcal{X}^{(l)},\mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty)(-1)),$$

qui induisent des homomorphismes de préfaisceaux d'anneaux $f_{l,k}^{-1}\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, d'où des flèches $\varphi_k^{-1}\mathcal{E}^{(m'_1,m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \varphi_l^{-1}\mathcal{E}^{(m'_2,m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$. On obtient des flèches entre les faisceaux $\varphi_k^{-1}\mathcal{F}^{(m'_1,m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ et $\varphi_l^{-1}\mathcal{F}^{(m'_2,m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$ en passant à la complétion p-adique.

4.4.4 Limite inductive des complétions faibles des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$.

Soit l un entier. D'après la proposition 5.2.1 de [5], il existe un homomorphisme (fini) α de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_l}$-algèbres $V^{(l)} \otimes_V \mathcal{B}^{(m'+l)}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{B}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(l)}}$, qui envoie moralement $\pi/f^{p^{m'+1+l}}$ sur $(\pi_l/f^{p^{m'+1}})^{p^l}$. On peut aussi définir une application $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_l}$-linéaire $\beta\colon \mathcal{B}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(l)}} \to V^{(l)} \otimes_V \mathcal{B}^{(m'+l)}_{\mathcal{X}}$, qui est telle que $\alpha\circ\beta$ et $\beta\circ\alpha$ sont égales à $p^c Id$. Ces applications induisent des applications α' et β'

$$\alpha'\colon V^{(l)} \otimes_V \mathcal{B}^{(m'+l)}_{\mathcal{X}}\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{B}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(l)}}\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(l)}},$$

l'application β' allant dans le sens inverse, telles que $\alpha'\circ\beta'$ et $\beta'\circ\alpha'$ soient égaux à $p^c Id$. L'application α est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$.

Soient maintenant m',m',k trois entiers. L'homomorphisme α induit un homomorphisme canonique de faisceaux de $V^{(k)} \otimes_V \widehat{\mathcal{B}}^{(m'+k)}_{\mathcal{X}}$-A.O.D.

$$V^{(k)} \otimes_V \widehat{\mathcal{B}}^{(m'+k)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k)}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}},$$

qui est fini et est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Nous pouvons donc appliquer 1.4.5 et en déduire que les complétions faibles de ces deux faisceaux de $V^{(k)}\otimes_V\widehat{\mathcal{B}}^{(m'+k)}_{\mathcal{X}}$-A.O.D. sont canoniquement isomorphes. En outre, l'homomorphisme α étant fini, la complétion faible de la deuxième algèbre coïncide avec la complétion faible de cette algèbre comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-A.O.D.. Cela nous donne un isomorphisme canonique

$$(\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k)}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})^{\dagger}_{\mathbf{Q}} \simeq V^{(k)} \otimes_V (\widehat{\mathcal{B}}^{(m'+k)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}})^{\dagger}_{\mathbf{Q}},$$

la deuxième complétion faible étant prise comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m'+k)}_{\mathcal{X}}$-algèbre. En passant à la limite inductive sur m',$m'k$, on obtient

Proposition 4.4.4.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{(m',m,k)}(\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k)}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})^{\dagger}_{\mathbf{Q}} \simeq A \otimes_V \mathcal{D}^{\dagger}({}^{\dagger}\mathcal{Z})_{\mathbf{Q}}.$$

4.4.5 Limite inductive des complétés p-adiques et des complétés faibles des faisceaux $\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$.

Pour les complétés p-adiques, les arguments sont en fait les mêmes que ceux utilisés pour montrer la proposition 5.2.3 de [5] et nous ne ferons que les esquisser. En particulier, le faisceau

$\widehat{\mathcal{F}}^{(m',m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ est un sous-faisceau de $V^{(l)} \otimes_V \mathcal{B}^{(m'+l)}_{\mathcal{X}} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, via une application ε, dépendant de m', m et k. On note encore ε la limite inductive de toutes ces applications. Le problème est de construire explicitement un inverse à ε, ce qui se fait localement comme en 5.2.3 de [5].

Reprenons en effet les notations de 5.2.3 de [5]. On pose $\kappa = [log_p(N+2)]+1$, $v_m = m+\kappa$, u_m une suite croissante d'entiers naturels telle que les triplets (u_m,m,v_m) soient dans Ω. On note $\mathcal{E}^{(m)} = \mathcal{E}^{(u_m,m)}_{\mathcal{X}^{v_m}}$, $\mathcal{F}^{(m)} = Im(\widehat{\mathcal{E}}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(u_m)} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}})$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert affine de $\mathcal{X}$, contenu dans l'un des $\mathcal{U}_k$, muni de coordonnées locales $x_1,\ldots,x_N$. Nous utilisons les notations de 2.6.1 pour les opérateurs différentiels sur $\mathcal{U}$, de niveau m et nous notons $m' = u_{m+2}$, $k = v_{m+2}$.

Par hypothèse, pour tout $k_i \leq p^{m+2}$, l'élément $\pi_k \partial_i^{<k_i>_{(m+2)}}$ est dans $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} u_k \Gamma(\mathcal{X}^{(k)}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m+2)}_{\mathcal{X}^{(k)},k_i}(-1))$. Finalement, $\forall k_i \leq p^{m+2}$,

$$\pi_k \xi^{k_i} \partial_i^{<k_i>_{(m+2)}} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \Delta'_{k_i},$$

et

$$\forall k_i \leq p^{m+2}, p\partial_i^{<k_i>_{(m+2)}} \in \mathcal{E}^{(m',m+2)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}).$$

Grâce à cela, on construit comme en 5.2.3 de [5] une flèche δ_m de $\widehat{\mathcal{B}}^{(u_m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}} \to \mathcal{E}^{(m+2)}$, qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{(m)} & \xhookrightarrow{i_m} & \mathcal{B}^{(u_m)} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{v_m)}} \\ p^c \downarrow & \swarrow \delta_m & \\ \mathcal{E}^{(m+2)}. & & \end{array}$$

La fin de la démonstration est alors tout à fait identique à celle de 5.2.3 de [5]. On en déduit le théorème qui suit.

Théorème 4.4.5.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{m',m,k} \widehat{\mathcal{F}}^{(m',m)}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} \simeq A \otimes_V \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}).$$

Nous aurons aussi besoin de l'énoncé suivant. Le symbole $\mathcal{E}^{(m',m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ désigne le complété faible de $\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$, comme faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-algèbres.

Théorème 4.4.5.2 *Il existe une application canonique surjective*

$$\varinjlim_{m',m,k} \mathcal{E}^{(m',m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} \to A \otimes_V \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}).$$

Démonstration. Nous utiliserons ici les notations précédentes. Des inclusions

$$\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}},$$

nous déduisons qu'il existe un système de flèches compatibles

$$\mathcal{E}^{(m',m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to (\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})^{\dagger},$$

qui donne une flèche f en passant à la limite inductive. Or, d'après 4.4.4.1, le deuxième système inductif, tensorisé par $\mathbf{Q}$ s'identifie à $A \otimes_V \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$. Pour montrer l'énoncé, il suffit donc de voir que f est surjective à torsion près. Pour cela, on considère, comme dans le paragraphe précédent, les triplets (u_m,m,v_m) de Ω et la flèche ($\widehat{\mathcal{B}}^{(u_m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}$-linéaire)

$$\delta_m \colon \widehat{\mathcal{B}}^{(u_m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(v_m)}} \to \mathcal{E}^{(m+2)}.$$

Pour la suite, on note $v_m = k$, $m' = u_m$. Cette flèche passe aux complétés p-adiques pour donner une flèche

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \widehat{\mathcal{E}}^{(m+2)}.$$

On vérifie que cette flèche (qui est la multiplication par p^c) induit une flèche au niveau des complétions faibles (comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-algèbres),

$$\delta^\dagger_m \colon (\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})^\dagger \to \mathcal{E}^{(m+2)'\dagger}$$

la notation $\mathcal{E}^{(m+2)'\dagger}$ désignant la complétion faible de $\mathcal{E}^{(m+2)}$ comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-algèbre. Si $\mathcal{E}^{(m+2)\dagger}$ est la complétion faible de $\mathcal{E}^{(m+2)}$ comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k+2)}}$-algèbre, il existe une application canonique

$$c_m : \mathcal{E}^{(m+2)'\dagger} \to \mathcal{E}^{(m+2)\dagger}.$$

On introduit $\varepsilon_m = c_m \circ \delta^\dagger_m$. De même la flèche i_m donne une flèche entre les complétions faibles comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-algèbres

$$i^\dagger_m : \mathcal{E}^{(m)\dagger} \to (\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})^\dagger.$$

D'autre part, il existe des homomorphismes entre les complétions faibles comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-algèbres

$$\rho_m : \mathcal{E}^{(m)\dagger} \to \mathcal{E}^{(m+2)'\dagger}.$$

On a la relation $\delta^\dagger_m \circ i^\dagger_m = p^c \rho_m$. Posons $\sigma_m = c_m \circ \rho_m$. On trouve finalement que $\varepsilon_m \circ i^\dagger_m = p^c \sigma_m$ et cela montre que la flèche f est surjective.

4.5 Démonstration du théorème de comparaison.

Les notations et les hypothèses sont celles de 4.1. Nous nous proposons de montrer :

Théorème 4.5.1 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}) \simeq \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})).$$

Démonstration. Partons de l'application canonique $\lambda \colon \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$. Il faut montrer que λ est surjective (puisqu'elle est injective). Pour cela, nous tensorisons par l'anneau A introduit en 4.4.3. Comme A est fidèlement plat sur V, il suffit de montrer que l'application suivante, toujours notée λ, est surjective

$$A \otimes_V \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}) \to A \otimes_V \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})).$$

Soit $U^\dagger_{(k)}$ le schéma f. formel $U^\dagger \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}^{(k)}$. Le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger_{(k)}}$ s'identifie à $V^{(k)} \otimes_V \mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$. D'après 2.7.3, il existe un isomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger_{(k)}}) \simeq \Gamma(\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k)}}({}^\dagger{*}\mathcal{Z}) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}).$$

Du fait que le faisceau $\mathcal{E}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k)}}(*\mathcal{Z}) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$, on en déduit un système de flèches compatibles

$$\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}) \to V^{(k)} \otimes_V \Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger}).$$

Introduisons $\widehat{B}^{(m)}_k = \Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ et $\widehat{B}^{(m)} = \widehat{B}^{(m)}_0$. D'après [8], l'algèbre de sections globales $\Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger})$, est une $V^{(k)} \otimes \widehat{B}^{(m)}$-algèbre f. complète. Les flèches précédentes donnent donc un système de flèches compatibles entre les complétions faibles de ces algèbres (comme $V^{(k)} \otimes \widehat{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-algèbres)

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\mathcal{E}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}})'^\dagger \to V^{(k)} \otimes_V \Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger}).$$

Comme $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ est une $V^{(k)} \otimes_V \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-algèbre cohérente, l'algèbre $\widehat{B}^{(m)}_k$ est finie sur $V^{(k)} \otimes \widehat{B}^{(m)}$. La première algèbre s'identifie donc à la complétion faible

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}) \to V^{(k)} \otimes_V \Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}).$$

D'autre part, on sait que le faisceau $\mathcal{E}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-A.O.D.. Il existe (4.2.4), des faisceaux $\mathcal{G}_l$ de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$-A.O.D., tels que

$$\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} \simeq \varinjlim_l \widehat{\mathcal{G}}_{l,\mathbf{Q}}$$

et tels que $\mathcal{X}^{(k)}$ soit $\widehat{\mathcal{G}}_{l,\mathbf{Q}}$-affine. Notons $\widehat{\mathcal{H}}_l = Im(\widehat{\mathcal{G}}_l \to A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$. D'après 4.2.4, le faisceau $\widehat{\mathcal{G}}_{l,\mathbf{Q}}$ est cohérent et les $\widehat{\mathcal{G}}_{l,\mathbf{Q}}$-modules cohérents sont acycliques pour le foncteur Γ. Ceci implique que l'on a des surjections, pour tout l,

$$\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{G}}_{l,\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{H}}_{l,\mathbf{Q}}).$$

Soit

$$\mathcal{F}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} = Im(\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} \to A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}).$$

En passant à la limite inductive sur l, on trouve des surjections

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{X}^{(k)},\mathcal{F}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}).$$

De plus, d'après 4.4.4, il existe un isomorphisme

$$\varinjlim_{(m',m,k)} \mathcal{F}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}} \simeq A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}).$$

Comme le foncteur Γ commute aux sections globales, on obtient, en passant à la limite inductive, une surjection s

$$\varinjlim_{(m',m,k)} \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{X},A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})).$$

On vérifie facilement que cette flèche s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_{(m',m,k)} \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E}^{(m)\dagger}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}) & \to & A \otimes_V \Gamma(U^\dagger,\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbf{Q}}) \\
s\downarrow & \lambda \swarrow & \\
A \otimes_V \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})). & &
\end{array}$$

Cela montre que λ est surjectif et le théorème.

L'équivalence de catégories annoncée en découle.

Théorème 4.5.2 *L'homomorphisme d'extensions des scalaires de 2.7.3.1 est une équivalence de catégories entre les catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{U^{\dagger},\mathbf{Q}}$-modules cohérents et la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$-modules cohérents.*

Références

[1] A. Grothendieck, en collaboration avec J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique.* Publ. Math. I.H.E.S., **32**, 1967.

[2] P. Berthelot. *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, **t. 29**, p.185–272, 1996.

[3] W. Fulton. *A note on weakly complete algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., **75**, p. 591–593, 1969.

[4] C. Huyghe. *$\mathcal{D}^{\dagger}$-affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot.* Compositio Mathematica, **108**, No. 3, p. 277–318, 1997.

[5] C. Huyghe. *$\mathcal{D}^{\dagger}(\infty)$-affinité des schémas projectifs.* Ann. Inst. Fourier, **48**, No. 4, p. 913–956, 1998.

[6] C. Huyghe. Finitude de la dimension cohomologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes. Preprint de l'IRMAR, janvier 2000.

[7] Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro. *Sur les coefficients de de Rham - Grothendieck des variétés algébriques.* Proc. Conf. *p-adic Analysis (Trento 1989),* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1454**, p. 267–308, 1990.

[8] Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro. *Sur les coefficients de de Rham - Grothendieck des variétés algébriques II.* En préparation, 1999.

[9] D. Meredith. *Weak formal schemes.* Nagoya Math. J., **45**, p. 1–38, 1971.

[10] P. Monsky and G. Washnitzer. *Formal cohomology I.* Annals of Math., **88**, p. 181–217, 1968.

[11] A. Virrion. *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques.* Bull. Soc. Math. France, 2000.

Christine Noot-Huyghe

UFR de mathématiques

Université de Rennes 1

campus de Beaulieu

35042 Rennes cedex

mél huyghe@univ-rennes1.fr