$\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur la variété de drapeaux

Christine Huyghe et Tobias Schmidt

March 1, 2017

Abstract

Let p be a prime number, V a complete discrete valuation ring of unequal caracteristics $(0,p)$, G a split reductive algebraic group over $Spec\, V$. We obtain a localization theorem, involving arithmetic distributions, for the sheaf of arithmetic differential operators on the formal flag variety of G. We give an application to the rigid cohomology of open subsets in the characteristic p flag variety.

Résumé

Soient p un nombre premier, V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, G un groupe reductif et deployé sur $Spec\, V$. Nous obtenons un théorème de localisation, en utilisant les distributions arithmétiques, pour le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur la variété de drapeaux formelle de G. Nous donnons une application à la cohomologie rigide pour des ouverts dans la variété de drapeaux en caractéristique p.

1 Introduction

Soient p un nombre premier, V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$ avec corps de fractions K et corps residuel κ. Soit $S = Spec\, V$ et G un groupe réductif et déployé sur S.

En utilisant les techniques de puissances divisées de niveau m de Berthelot [Ber96] et dans un cadre plus général, nous avons construit dans [HS15] des algèbres de distributions arithmétiques $D^{(m)}(G)$, de niveau m, généralisant la construction classique de l'algèbre de distributions sur G [DG70, II.§4.6.1]. Si X est un schéma lisse sur S avec une action (à

MSC classification 2010 : 20G05, 20G25, 13N10, 16S32 droite) de G, alors l'algèbre $D^{(m)}(G)$ agit sur X par des opérateurs différentiels arithmétiques globaux de niveau m.

Ici, nous utilisons ces algèbres pour montrer une version arithmétique, i.e. une version pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot, du théorème de localisation classique de Beilinson-Bernstein [BB81]. Rappelons plus précisément de quoi il s'agit. Soient $X = B\backslash G$ la variété de drapeaux de G ($B \subset G$ un sous-schéma de Borel) et X_K sa fibre générique. Soit $\mathcal{D}_{X_K}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X_K. Soient $\mathfrak{g}_K$ l'algèbre de Lie de G_K, $U(\mathfrak{g}_K)$ son algèbre enveloppante et Z_K^+ la partie positive du centre de $U(\mathfrak{g}_K)$.

Le théorème de localisation de loc. cit. se décompose en deux parties[1] : premièrement, l'action naturelle de G_K sur X_K (à droite), induit un isomorphisme d'algèbres Q_K entre la réduction centrale $U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^+\rangle$ et les opérateurs différentiels globaux sur X_K. Deuxièmement, l'extension des scalaires par Q_K et le passage aux sections globales induisent des équivalences de catégories quasi-inverses entre les $\mathcal{D}_{X_K}$-modules sur X_K qui sont quasi-cohérents sur le faisceau structural $\mathcal{O}_{X_K}$, et les modules sur $U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^+\rangle$. Dans cette équivalence, les $\mathcal{D}_{X_K}$-modules cohérents correspondent aux modules de type fini. En réalité, ces énoncés sont démontrés dans loc. cit. dans le contexte plus général des opérateurs différentiels twistés et des caractères centraux arbitraires de $U(\mathfrak{g}_K)$. Une conséquence directe de la version complexe de ce théorème est une classification de tous les modules de Harish-Chandra irréductibles (rélative à un sous-groupe n'ayant qu'un nombre fini d'orbites dans la variété de drapeaux complexe) [BB81]. Cela permet de classifier tous les représentations admissibles irréductibles d'un groupe de Lie réel donné [Sch].

Dans les dernières années, il est devenu evident par les travaux de Patel-Schmidt-Strauch [PSS13, PSS16] qu'il existe un analogue en géométrie arithmétique de la théorie de Beilinson-Bernstein qui permettrait d'étudier les représentations admissibles d'un groupe de Lie p-adique [ST03]. Ici, la variéte de drapeaux complexe est remplacée par sa version p-adique analytique (rigide, Berkovich ou adic). En plus, les D-modules complexes sont remplacé par une version analytique et equivariante des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques classiques au sens de Berthelot [Ber96, Ber00]. Le premier resultat fondamental dans ce cadre est le théorème de localisation arithmétique qui devrait mettre en correspondance certains représentations admissibles et certains $\mathcal{D}$-modules arithmétiques equivariants (voici [**?**] pour le cas du groupe GL(2)). La variété de drapeaux analytique s'écrit à l'aide de tous ses modèles formels et le cas fondamental à considérer est le cas du modèle lisse, c'est-à-dire, le cas de la variété de drapeaux formelle. Le but de cet article est de resoudre ce cas et d'établir le théorème de Beilinson-Bernstein arithmétique dans ce cas.

[1]Dans loc.cit. le théorème est formulé pour le corps des nombres complexes mais il est bien connu qu'il se généralise à n'importe quel corps de caractéristique zéro sur lequel l'algèbre de Lie réductive est scindée.

Pour décrire cette version arithmétique, nous introduisons la complétion formelle $\mathcal{G}$ de G le long de sa fibre spéciale et nous travaillons sur la variété de drapeaux formelle $\mathcal{X}$ de $\mathcal{G}$. On dispose sur cet espace des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, obtenus par complétion à partir des opérateurs différentiels de niveau fini m sur $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ obtenu par passage à la limite sur m de ces faisceaux. Rappelons que la cohomologie rigide ou cristalline des schémas sur un corps de caractéristique finie fournit naturellement des coefficients qui sont des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents [Ber89]. Nous considérons ici les complétions $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ des algèbres de distributions $D^{(m)}(G)$, ainsi que leur limite inductive sur m, $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$. L'anneau $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent si l'indice de ramification e de $K/\mathbf{Q}$ satisfait $e < p-1$ [HS15].

Le principal résultat de cet article (3.2.3) est qu'il existe un isomorphisme Q entre la réduction centrale $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}/\langle Z_K^{+}\rangle$ et les sections globales de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^{+}\rangle \arrow[r, "Q_K", "\simeq"'] \arrow[d, hook] & \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K}) \arrow[d, hook] \\ D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}/\langle Z_K^{+}\rangle \arrow[r, "Q", "\simeq"'] & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}). \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales de ce diagramme sont des injections plates et l'isomorphisme Q peut être vu comme une complétion faible de l'isomorphisme classique Q_K. Ces résultats, joints avec le résultat de $\mathcal{D}$-affinité de [Huy97] impliquent que les foncteurs sections globales et l'extension des scalaires via Q sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents et les $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}/\langle Z_K^{+}\rangle$-modules de présentation finie. En fait, tous les énoncés sont vrais à chaque niveau m fixé et dans le contexte plus général des opérateurs différentiels twistés et de caractères centraux arbitraires.

Une conséquence importante du théorème de localisation concerne la cohomologie rigide des ouverts de la variété de drapeaux obtenus comme complémentaires de diviseurs. Soit $Z \subset \mathcal{X}_\kappa$ un diviseur de la fibre spéciale $\mathcal{X}_\kappa$ de $\mathcal{X}$. Soient Y l'ouvert complémentaire, $v : Y \hookrightarrow \mathcal{X}_\kappa$ l'immersion correspondante et $H^{\bullet}_{\mathrm{rig}}(Y/K)$ la cohomologie rigide de Y. Soient $\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ l'espace analytique rigide associé à $\mathcal{X}$, $v^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}$ le faisceau des fonctions surconvergentes le long de Z. L'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$ induit une action de $U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^{+}\rangle$ sur $v^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}}$ par des opérateurs différentiels. Notons en outre $H^{\bullet}_{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}_K, .) := \mathrm{Ext}^{\bullet}_{U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^{+}\rangle}(K, .)$ les foncteurs dérivés de $M \to M^{\mathfrak{g}_K}$ sur la catégorie des $U(\mathfrak{g}_K)/\langle Z_K^{+}\rangle$-modules. Ces groupes de cohomologie peuvent être vus comme un analogue en caractéristique zéro de la cohomologie d'algèbre de Lie restreinte [Jan87]. Supposons $e < p-1$. Nous démontrons un isomorphisme canonique

$$H^{\bullet}_{\mathrm{rig}}(Y/K) \xrightarrow{\simeq} H^{\bullet}_{\mathrm{res}}(\mathfrak{g}_K, \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}, v^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{rig}}})).$$

Remarquons que pour le niveau $m = 0$, dans le cas où le groupe G est semi-simple, et pour p 'très bon' (condition liée au système de racines de G), le théorème de localisation etait établi par Ardakov et Wadsley dans [AW13].

Le premier auteur remercie Michel Gros, King Fai Lai et Adriano Marmora pour leurs encouragements à rédiger ce travail, ainsi que Pierre Berthelot pour ses réponses à nos questions. Le second auteur a accompli une partie de ce travail alors qu'il était lauréat d'une bourse Heisenberg attribuée par la Deutsche Forschungsgemeinschaft. Il tient à remercier cette institution pour son soutien.

Notations : V designe toujours un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, nous noterons π une uniformisante de V, $K = Frac(V)$ et κ le corps résiduel de V. On écrit $S = Spec\, V$ et G designe toujours un groupe reductif et deployé sur S. On écrit $G_K = G \times_S Spec\, K$ et $G_\kappa = G \times_S Spec\, \kappa$.

On écrit $\mathcal{S} = Spf\, V$. Un $\mathcal{S}$-schéma formel est un schéma formel localement noethérien $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{S}$, tel que $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ soit un idéal de definition. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$-schéma formel, alors X_i sera le S-schéma $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} Spec\,(V/\pi^{i+1}V)$. Si X est un S-schéma quelconque, le $\mathcal{S}$-schéma formel obtenu par compléter X le long de l'idéal $\pi\mathcal{O}_X$, sera toujours noté $\mathcal{X}$.

Tous les schémas considérés dans cet article sont localement noetheriens. Tous les modules sont des modules à gauche.

2 Distributions arithmétiques sur un groupe réductif

2.1 Distributions

Notons I l'idéal premier, noyau du morphisme de V-algèbres $\varepsilon_G : V[G] \to V$ donnant l'élément neutre de G. Alors, I/I^2 est un $V = V[G]/I$-module libre de rang fini. Soient $t_1, \dots, t_N \in I$ tels que modulo I^2, ces éléments forment une base de I/I^2. La m-PD-enveloppe de I, notée $P_{(m)}(G)$, est un V-module libre de base les éléments

$$\underline{t}^{\{\underline{k}\}} = t_1^{\{k_1\}} \cdots t_N^{\{k_N\}},$$

où $q_i! t_i^{\{k_i\}} = t_i^{k_i}$ avec $i = p^m q_i + r$ et $r < p^m$ [Ber96, 1.5]. Ces algèbres sont munies d'une filtration décroissante par les idéaux $I^{\{n\}}$, tels que

$$I^{\{n\}} = \bigoplus_{|\underline{k}| \geq n} V \cdot \underline{t}^{\{\underline{k}\}}. \tag{1}$$

Les quotients $P^n_{(m)}(G) := P_{(m)}(G)/I^{\{n+1\}}$ sont donc engendrés comme V-module par les éléments $\underline{t}^{\{k\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$ et on dispose d'un isomorphisme $P^n_{(m)}(G) \simeq \bigoplus_{|\underline{k}| \leq n} V \underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ comme V-modules. On a les surjections canoniques $pr^{n+1,n} : P^{n+1}_{(m)}(G) \twoheadrightarrow P^n_{(m)}(G)$.

On note

$$Lie(G) := Hom_V(I/I^2, V).$$

L'algèbre $Lie(G)$ est un V-module libre de base $\xi_1, \dots, \xi_N$ que l'on définit comme la base duale des $t_1, \dots, t_N$. Pour $m' \geq m$, d'après la propriété universelle des algèbres à puissances divisées, il existe des homomorphismes d'algèbres filtrées $\psi_{m,m'} : P_{(m')}(G) \to P_{(m)}(G)$ qui donnent par passage au quotient des homomorphismes d'algèbre $\psi^n_{m,m'} : P^n_{(m')}(G) \to P^n_{(m)}(G)$. Le module de distributions de niveau m et d'ordre n de G est $D^{(m)}_n(G) := Hom_V(P^n_{(m)}(G), V)$. *L'algèbre des distributions de niveau* m est

$$D^{(m)}(G) := \varinjlim_n D^{(m)}_n(G)$$

où la limite est formée par rapport aux applications $Hom_V(pr^{n+1,n}, V)$.

Pour un entier $m' \geq m$, les morphismes d'algèbres $\psi^n_{m,m'}$ donnent par passage à la dualité des applications linéaires $\Phi^n_{m,m'} : D^{(m)}_n(G) \to D^{(m')}_n(G)$ et ensuite une morphisme d'algb̀res filtrées $\Phi_{m,m'} : D^{(m)}(G) \to D^{(m')}(G)$.

Soit maintenant $\mathcal{G}$ le complété formel de G le long de sa fibre spéciale. On note $G_i = Spec\ V[G]/\pi^{i+1}$. Le morphisme $G_{i+1} \hookrightarrow G_i$ induit un homomorphisme $D^{(m)}(G_{i+1}) \to D^{(m)}(G_i)$. On pose

$$\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) := \varprojlim_i D^{(m)}(G_i).$$

Si $m' \geq m$, on a les morphismes $\hat{\Phi}_{m,m'} : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \to \widehat{D}^{(m')}(\mathcal{G})$ et on définit les anneaux

$$D^\dagger(\mathcal{G}) := \varinjlim_m \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} := D^\dagger(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{Q}.$$

On rappelle un resultat de structure important de l'anneaux $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ [HS15, 5.3.1/2]. Soit $\widehat{G}$ la complétion de G relativement au point fermé correspondant à l'élément neutre de G_κ. Donc, $\widehat{G}$ un schéma en groupes affine formel sur $\mathcal{S}$ (mais pas un $\mathcal{S}$-schéma formel car, en général, $\pi\mathcal{O}_{\widehat{G}}$ n'est pas un idéal de définition !). On écrit $G^\circ := \widehat{G}^{\mathrm{rig}}$ pour sa fibre générique au sens de Berthelot [dJ96, 7.1]. Le groupe rigide analytique G° est isomorphe, comme espace analytique, au disque unité ouvert de dimension N. En particulier, l'algèbre $\mathcal{O}(G^\circ)$ des sections globales est un espace de Fréchet. Emerton's algèbre des distributions analytiques sur G° [Em04] est le dual continu

$$D^{an}(G^\circ) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{ct}}_K(\mathcal{O}(G^\circ), K)$$

avec le produit de convolution. Pour chaque $\xi \in Lie(G^\circ)$ on obtient un élément de $D^{an}(G^\circ)$ via

$$f \mapsto \frac{d}{dt} f(\exp(t\xi))|_{t=0} \in K$$

où $f \in \mathcal{O}(G^\circ)$ et où exp est l'application exponentielle de G°.

Théorème 2.1.1. *Le homomorphisme $U(Lie(G^\circ)) \to D^{an}(G^\circ)$ s'étend en un isomorphisme*

$$D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\simeq} D^{an}(G^\circ).$$

L'anneau $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent, si l'indice de ramification e de K sur $\mathbf{Q}_p$ satisfait $e < p-1$.

Pour plus de détails nous référons à [HS15].

2.2 Décomposition triangulaire

La décomposition triangulaire suivante donne une description explicite des éléments de $D^{(m)}(G)$. Soient B un sous-schéma en groupes de Borel de G contenant un tore maximal déployé T. Soit $N \subset B$ le radical unipotent de B et soit $\overline{N}$ le radical unipotent opposé. L'application produit $N \times T \times \overline{N} \to G$ est une immersion ouverte dont l'image contient l'élément neutre. Par [HS15, 4.1.11] il existe un isomorphisme filtré de V-modules

$$D^{(m)}(N) \otimes_V D^{(m)}(T) \otimes_V D^{(m)}(\overline{N}) \xrightarrow{\simeq} D^{(m)}(G). \tag{2}$$

Choisissons une base $\xi_1, ..., \xi_q$ de $Lie(N)$, une base $\xi'_1, ..., \xi'_q$ de $Lie(\overline{N})$ et une base $\xi''_1, ..., \xi''_l$ de $Lie(T)$. Comme S-schémas on a $N, \overline{N} \simeq \mathbf{G}_a^q$ et $T \simeq \mathbf{G}_m^l$. En appliquant [HS15, 4.1.11/12] on trouve que $D_n^{(m)}(G)$ est égal au V-module libre de base les éléments $\underline{\xi}^{\langle \underline{i} \rangle} \cdot \underline{\xi}''^{\langle \underline{k} \rangle} \cdot \underline{\xi}'^{\langle \underline{j} \rangle}$, où $|\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}| \leq n$. Ici,

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{i} \rangle} = q_{\underline{i}}! \frac{\underline{\xi}^{\underline{i}}}{\underline{i}!}, \qquad \underline{\xi}'^{\langle \underline{j} \rangle} = q_{\underline{j}}! \frac{\underline{\xi}'^{\underline{j}}}{\underline{j}!}, \qquad \underline{\xi}''^{\langle \underline{k} \rangle} = q_{\underline{k}}! \binom{\underline{\xi}''}{\underline{k}},$$

vus comme éléments de l'algèbre enveloppante universelle $U(Lie(G) \otimes K)$. En particulier, $D^{(0)}(G)$ est égale à la V-algèbre $U(Lie(G))$ et $\cup_m D^{(m)}(G) = Dist(G)$, l'algèbre de distributions classiques du schéma en groupes G [DG70, II.§4.6.1].

3 Opérateurs différentiels arithmétiques globaux

3.1 Notation

On note $X = B \backslash G$ la variété de drapeaux de G, $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{X}$) la variété de drapeaux formelle obtenue en complétant p-adiquement G (resp. $\mathcal{X}$) le long de l'idéal π. On a l'action à droite usuelle de G sur X (par translation) et de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$. Soit T un tore maximal de G, et λ un caractère de T qui est un poids dominant et régulier. Ceci est équivalent à dire que le faisceau inversible G-équivariant sur la variété de drapeaux X, $\mathcal{L}(\lambda)$, qui est associé à λ par la construction habituelle, est ample et vérifie $\Gamma(X, \mathcal{L}(\lambda)) \neq 0$. On note $\mathcal{T}_X$ le faisceau tangent sur X, $\mathcal{D}_X$ le faisceau usuel des opérateurs différentiels construit dans [Gro67], $\mathcal{D}_X^{(m)}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ les faisceaux des opérateurs différentiels arithmétiques introduits par Berthelot en [Ber96] et leurs variantes twistées

$$ {}^t\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1} \quad \text{resp.} \quad {}^t\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1} $$

où $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda)$.

3.2 Sections globales sur la variété de drapeaux

3.2.1 Rappels du cas classique

On considère ici le groupe algébrique $G_K = G \times_S Spec\ K$ et la variété de drapeaux $X_K = X \times_S Spec\ K$ de G_K, obtenue par changement de base à partir de X.

Soient $U_K = U(Lie(G_K))$ l'algèbre enveloppante de $Lie(G_K)$, Z_K son centre, et $\xi_1, \ldots, \xi_N$ notre base de $Lie(G)$. On se donne un plongement

$$ \iota : K \hookrightarrow \mathbf{C}. $$

On peut alors considérer le groupe algébrique complexe $G_{\mathbf{C}}$, sa variété de drapeaux $X_{\mathbf{C}}$ et son aalgèbre de Lie $Lie(G_{\mathbf{C}}) = Lie(G) \otimes_K \mathbf{C}$. De ce fait, l'algèbre enveloppante notée $U_{\mathbf{C}}$ de $Lie(G_{\mathbf{C}})$ est isomorphe à $\mathbf{C} \otimes_K U_K$. Soit $Z_{\mathbf{C}}$ son centre. Si $a \in U_K$, on note

$$ C_a : U_K \longrightarrow U_K,\ x \mapsto [a, x]. $$

On vérifie alors facilement que $Z_K = \bigcap_{i=1}^{N} Ker(C_{\xi_i})$, ce qui montre que $Z_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_K Z_K$. De même, si on note $Z_{K+} = Z_K \bigcap Lie(G) U_K$ (resp. $Z_{\mathbf{C}+} = Z_{\mathbf{C}} \bigcap Lie(G) U_{\mathbf{C}}$), alors $Z_{\mathbf{C}+} = \mathbf{C} \otimes_K Z_{K+}$. Dans la suite, on notera

$$ U_{K,0} := U_K / Z_{K+}, \quad \text{et} \quad U_{\mathbf{C},0} := U_{\mathbf{C}} / Z_{\mathbf{C}+}. $$

De plus, $\mathcal{D}_{X_{\mathbf{C}}} = \mathbf{C} \otimes_K \mathcal{D}_{X_K}$, de sorte que $\Gamma(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}_{\mathbf{C}}}) = \mathbf{C} \otimes_K \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K})$. En particulier on dispose d'injections canoniques

$$ \iota_D : \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K}) \xrightarrow{\subset} \Gamma(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{D}_{X_{\mathbf{C}}}),\ x \mapsto 1 \otimes x $$

resp. $\iota_U : U_K \hookrightarrow U_{\mathbf{C}}$. L'action de G sur X induit un homomorphisme $Q_K : U_K \to \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K})$ (resp. $Q_{\mathbf{C}} = 1 \otimes Q_K : U_{\mathbf{C}} \to \Gamma(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{D}_{X_{\mathbf{C}}})$). Il résulte de [BB81] que $Q_{\mathbf{C}}(Z_{\mathbf{C}+}) = 0$ et que l'on a un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$ Q_{\mathbf{C}} :\ U_{\mathbf{C},0} \xrightarrow{\simeq} \Gamma(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{D}_{X_{\mathbf{C}}}). $$

Ceci implique que $Q_K(Z_{K+}) = 0$ et que l'on a un isomorphisme de K-algèbres

$$Q_K : U_{K,0} \xrightarrow{\simeq} \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K}).$$

Dans le cas twisté, la situation est la suivante. Soient λ un poids dominant et régulier de T, $\mathcal{L}(\lambda)$ le faisceau inversible associé sur X. On dispose d'un homomorphisme ${}^tQ_K$: $U_K \to \Gamma(X_K, {}^t\mathcal{D}_{X_K})$, où ${}^t\mathcal{D}_{X_K} = \mathcal{L}(\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X_K} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$. Alors, toujours d'après [BB81], ${}^tQ(Z_{\mathbf{C}}) \subset \mathbf{C}$, de sorte que ${}^tQ(Z_K) \subset K$, ce qui définit un caractère $\theta : Z_K \to K$. Alors, par loc. cit., ${}^tQ_{\mathbf{C}}$ induit un isomorphisme

$${}^tQ_{\mathbf{C}} : U_{\mathbf{C}}/(Ker\ \theta_{\mathbf{C}})U_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\simeq} \Gamma(X_{\mathbf{C}}, {}^t\mathcal{D}_{X_{\mathbf{C}}}).$$

Les mêmes arguments que précédemment montrent que cet isomorphisme se descend en un isomorphisme de K-algèbres

$${}^tQ_K : U_K/(Ker\ \theta_K)\, U_K \xrightarrow{\simeq} \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K}).$$

3.2.2 Enoncé du théorème

Soit $m \in \mathbf{N}$. On rappelle la construction du morphisme d'anneaux

$$Q_m : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$$

induite par l'action σ de G sur X par translations à droite [HS15, 5.2]. Le morphisme de faisceaux associé á σ

$$\sigma^\sharp : \mathcal{O}_X \to V[G] \otimes_V \mathcal{O}_X$$

induite une application

$$\sigma^{(n)}_m : \mathcal{P}^n_{X,(m)} \to \mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G)$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Les applications $\sigma^{(n)}_m$ sont compatibles entre elles pour n variables. Soit maintenant u un élément de $D^{(m)}_n(G)$, on lui associe l'opérateur différentiel $Q_{m,n}(u) \in \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_{X,n})$ suivant (défini localement)

$$Q_{m,n}(u) : \mathcal{P}^n_{X,(m)} \xrightarrow{\sigma^{(n)}_m} P^n_{(m)}(G) \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{u \otimes Id} \mathcal{O}_X.$$

Ces applications $Q_{m,n}$ passent à la limite inductive sur n pour n variable en un morphisme filtré V-linéaire entre $D^{(m)}(G)$ et $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$. Le morphisme d'anneaux cherché Q_m en resulte par complétion π-adique.

D'autre part, comme l'algèbre $D^{(m)}(G)$ (resp. le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_X$) est séparé pour la topologie π-adique, on dispose d'injections canoniques $D^{(m)}(G)_K \hookrightarrow \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$ (resp. $\mathcal{D}^{(m)}_{X_K} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X_K}$).

Or $D^{(m)}(G)_K$ s'identifie à U_K, cf. 2.2, et $\mathcal{D}^{(m)}_{X_K}$ à $\mathcal{D}_{X_K}$. On dispose finalement du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U_K \arrow[r, "Q_K"] \arrow[d, hook] & \Gamma(X_K, \mathcal{D}_{X_K}) \arrow[d, hook] \\ \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K \arrow[r, "Q_m"] & \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}), \end{tikzcd}$$

qui montre que $Q_m(Z_{K+}) = 0$ et que Q_m passe au quotient par Z_{K+} en un homomorphisme toujours notée Q_m. Notons

$$\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} := \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K / Z_{K+}\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K \quad \text{et} \quad D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} := D^{\dagger}(\mathcal{G})_K / Z_{K+}D^{\dagger}(\mathcal{G})_K.$$

On propose de montrer le

Théorème 3.2.3. *(i) On a un isomorphisme canonique*

$$Q_m : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \xrightarrow{\simeq} \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}).$$

(ii) On a un isomorphisme canonique

$$Q : D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \xrightarrow{\simeq} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}).$$

(iii) L'idéal Z_{K+} est contenu dans le centre de $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$ et de $D^{\dagger}(\mathcal{G})_K$.

Le (ii) s'obtient par passage à la limite à partir de (i). L'alinéa (i) sera démontré en 3.2.6. Montrons (iii). Comme $D^{\dagger}(\mathcal{G})_K$ est limite inductive des algèbres $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$, il suffit de montrer que Z_{K+} est dans le centre des algèbres $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_N$ une base de $Lie(G)$. L'algèbre U_K est dense dans l'algèbre $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$ pour la topologie p-adique. Soit $t \in Z_{K+}$, le commutateur C_t est une application continue : $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K \to \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$, qui s'annule sur U_K et qui est donc nulle sur l'algèbre $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K$. En particulier, les idéaux introduits dans l'énoncé $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K Z_{K+}$ et $D^{\dagger}(\mathcal{G})_K Z_{K+}$ sont bilatères.

3.2.4 Enoncé du théorème dans le cas twisté

Nous reprenons les notations de la sous-section précédente 3.2.2. Après la version à droite de [HS15, 5.2.4], l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$ par translations à droite donne un homomorphisme

$${}^{t}Q_m : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, {}^{t}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}).$$

Dans le cas twisté, on dispose de l'analogue du diagramme commutatif précédent

$$\begin{tikzcd} U_K \arrow[r, "{}^{t}Q_K"] \arrow[d, hook] & \Gamma(X_K, {}^{t}\mathcal{D}_{X_K}) \arrow[d, hook] \\ \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K \arrow[r, "{}^{t}Q_m"] & \Gamma(\mathcal{X}, {}^{t}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}), \end{tikzcd}$$

qui montre que ${}^tQ_m(Ker\ \theta_K) = 0$ et que Q_m passe au quotient par $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K(Ker\ \theta_K)$ en un homomorphisme toujours notée ${}^tQ_m$. L'énoncé dans le cas twisté est

Théorème 3.2.5. *(i) On a un isomorphisme canonique*

$$ {}^tQ_m : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K/\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K(Ker\ \theta_K) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(\mathcal{X}, {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}). $$

(ii) On a un isomorphisme canonique

$$ {}^tQ : D^{\dagger}(\mathcal{G})_K/D^{\dagger}(\mathcal{G})_K(Ker\ \theta_K) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(\mathcal{X}, {}^t\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}). $$

Observons comme précédemment que le (ii) s'obtient par passage à la limite sur m à partir de (i). Nous montrons le (i) de ces théorèmes dans la suite de cet article en reprenant partiellement les techniques de [NH09] et les résultats de [HS15].

3.2.6 Démonstration du théorème

Rappelons que'*un $\mathcal{O}_X$-anneau* est un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur X avec un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}$ est quasi-cohérent commme $\mathcal{O}_X$-module [Beil84]. Considérons, sur la variété de drapeaux de X, le faisceau de $\mathcal{O}_X$-anneaux $\mathcal{A}_X^{(m)} = \mathcal{O}_X \otimes_V D^{(m)}(G)$ introduit et étudit en [HS15, 4.4.7]. Ils sont des faisceaux d'anneaux cohérents. Etudions d'abord les propriétés cohomologiques des $\mathcal{A}_X^{(m)}$-modules cohérents sur la variété de drapeaux. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_X^{(m)}$-module cohérent. Nous avons la

Proposition 3.2.6.1. *(i) $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{(m)}) = D^{(m)}(G)$ est une V-algèbre noetherienne.*

(ii) Le module $\mathcal{M}$ admet une résolution globale par des modules du type $\mathcal{A}_X^{(m)}(-r)^a$ avec $r \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{N}$,

(iii) $\forall k \in \mathbf{N}$, $H^k(X, \mathcal{M})$ est un $D^{(m)}(G)$-module de type fini.

Démonstration. Comme $D^{(m)}(G)$ est un V-module libre, on a $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{(m)}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_V D^{(m)}(G)$ d'où le résultat puisque $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = V$ et que $D^{(m)}(G)$ est noetherien [HS15, 4.1.13]. Le (ii) provient de 2.2.1 of [NH09] en remplaçant $\mathcal{D}$ par $\mathcal{A}_X^{(m)}$. La démonstration de (iii) est aussi dans loc. cit. En effet, on montre (iii) par récurrence descendante en k en écrivant le longue suite exacte de cohomologie. L' assertion est trivialement vraie pour $k = N+1$ car $H^{N+1}(X, \mathcal{M}) = 0$ puisque $\mathcal{M}$ est quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module. De plus $D^{(m)}(G) = \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{(m)})$ et

$$ H^k(X, \mathcal{A}_X^{(m)}(-r)^a) \simeq H^k(X, \mathcal{O}_X(-r)^a) \otimes_V D^{(m)}(G), $$

qui est un $D^{(m)}(G)$-module de type fini. Supposons que l'assertion soit vraie pour tout $\mathcal{A}_X^{(m)}$-module cohérent et pour le degré cohomologique $k+1$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_X^{(m)}$-module cohérent et établissons l'assertion pour le degré k. Grâce à (ii), il existe $r \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{N}$ et un morphisme $\mathcal{A}_X^{(m)}$-linéaire $\mathcal{A}_X^{(m)}(-r)^a \to \mathcal{M}$ qui est surjectif. Soit $\mathcal{N}$ son noyeau, un $\mathcal{A}_X^{(m)}$-module cohérent. On a donc une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{A}_X^{(m)}(-r)^a \to \mathcal{M} \to 0.$$

En passant à la cohomologie, on trouve un complexe exact

$$H^k(X, \mathcal{A}_X^{(m)}(-r)^a) \to H^k(X, \mathcal{M}) \to H^{k+1}(X, \mathcal{N}).$$

Comme $D^{(m)}(G)$ est noetherien, cela montre que $H^k(X, \mathcal{M})$ est un $D^{(m)}(G)$-module de type fini. □

Le $\mathcal{O}_X$-anneau $\mathcal{A}_X^{(m)}$ est filtrée par les sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{A}_{X,n}^{(m)} = D_n^{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X$. Comme au-dessus l'action à droite de G sur X induit un morphisme filtré de $\mathcal{O}_X$-anneaux

$$Q_{m,X} : \mathcal{A}_X^{(m)} \longrightarrow \mathcal{D}_X^{(m)}$$

(resp. ${}^tQ_{m,X} : \mathcal{A}_X^{(m)} \to^t \mathcal{D}_X^{(m)}$) [HS15, 4.4.7.2/4.5]. L'espace X est homogène sous l'action de G ce qui implique que ces morphismes sont surjectif en passant aux gradués associés d'après [HS15, 4.4.8.2/4.5.3]. Par un argument classique les morphismes $Q_{m,X}$ et ${}^tQ_{m,X}$ sont donc surjectifs. L'anneau $\mathcal{A}_X^{(m)}$ est à sections noetheriennes sur les ouverts affines [HS15, 4.4.7] et on obtient ainsi, grâce à la proposition précédente la

Proposition 3.2.6.2. *(i) $\mathcal{D}_X^{(m)}$ (resp. ${}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$) est un $\mathcal{A}_X^{(m)}$-module cohérent,*

(ii) $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. $\Gamma(X,{}^t \mathcal{D}_X^{(m)})$) est un $D^{(m)}(G)$-module de type fini.

Rappelons maintenant le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient A une V-algèbre noetherienne, M, N deux A-modules de type fini, $u : M \to N$, une application A-linéaire, $\widehat{u} : \widehat{M} \to \widehat{N}$, l'application induite par u après complétion π-adique. Supposons que u induise un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$, $u \otimes 1 : M_{\mathbf{Q}} \to N_{\mathbf{Q}}$, alors $\widehat{u} \otimes 1$ induit un isomorphisme : $\widehat{M}_{\mathbf{Q}} \to \widehat{N}_{\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. Soit P le noyau (resp. conoyau) de u. La complétion π-adique est un foncteur exacte sur les A-modules de type fini [Ber96, 3.2.3] et donc $\widehat{P}$ est le noyau (resp. conoyau) de $\widehat{u}$. Mais $\widehat{P} = \operatorname{proj\,lim}_n P/\pi^n P = P$, car P est de π-torsion, est donc $\widehat{P}_{\mathbf{Q}} = P_{\mathbf{Q}} = 0$. □

Considérons $Z_+ = Z_{K+} \bigcap D^{(m)}(G)$, alors $Z_+ \otimes_V K = Z_{K+}$. Nous appliquons ce lemme à $M = D^{(m)}(G)/D^{(m)}(G)Z_+$, $N = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_X^{(m)})$ qui est un $D^{(m)}(G)$-module de type fini par la proposition précédente et $Q_m : D^{(m)}(G)/D^{(m)}(G)Z_+ \to \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_X^{(m)})$.

Le morphisme $Q_m \otimes 1$ est le morphisme $D^{(0)}(G)_{\mathbf{Q}}/D^{(0)}(G)_{\mathbf{Q}}Z_{K+} \to \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}})$ qui est un isomorphisme grâce au résultat classique pour les $\mathcal{D}$-modules algébriques en car. 0 rappelés en 3.2. La complétion π-adique est un foncteur exact sur les $D^{(m)}(\mathcal{G})$-modules de type fini [Ber96, 3.2.3] car $D^{(m)}(\mathcal{G})$ est noetherien, de sorte que $\widehat{M}_{\mathbf{Q}} \simeq \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K/\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K Z_{K+}$. En outre, le complété π-adique de N est $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ d'après 3.2.6 de [Gro60]. On déduit alors du lemme précédent que le complété de $Q_m : \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \to \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$, est un isomorphisme. Cela achève la démonstration du théorème 3.2.3 dans le cas non twisté.

Pour avoir le théorème dans le cas twisté, on pose $Ker\ \theta = (Ker\ \theta_K) \bigcap D^{(m)}(G)$, $M = D^{(m)}(G)/D^{(m)}(G)(Ker\ \theta)$. Nous appliquons alors le lemme précédent à M, $N = \Gamma(\mathcal{X}, {}^t\mathcal{D}^{(m)}_X)$ et ${}^tQ_m : M \to N$. Grâce au théorème de Beilinson-Bernstein pour le cas twisté rappelé en 3.2, le morphisme ${}^tQ_m \otimes 1$ est un isomorphisme. De plus, $\widehat{M}_{\mathbf{Q}} \simeq \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}_K)/\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K(Ker\ \theta_K)$ et le complété π-adique de N est $\Gamma(\mathcal{X}, {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$. En appliquant le lemme précédent, on voit donc que l'on a un isomorphisme $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K/\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_K(Ker\ \theta_K) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{X}, {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$, ce qui achève la démonstration du théorème.

4 Application à la cohomologie rigide

Nous reprenons les notations de la section précédente. Nous expliquons ici un lien entre la cohomologie rigide des certains ouverts de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ et la cohomologie de l'algèbre de Lie, $Lie(G_K)$. Nous reprenons ici les notations de la section précédente. On dispose d'un isomorphisme canonique $Q:\ D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$. Suivant [NH09], le foncteur $\Gamma(\mathcal{X}, .)$ est acyclique sur les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents, à valeurs dans la catégorie des $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$-modules cohérents. On dispose d'un foncteur quasi-inverse, donné par

$$M \mapsto \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})} M.$$

Le foncteur $Q \circ \Gamma(\mathcal{X}, .)$ induit une équivalence entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules (à gauche) cohérents et les $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$-modules (à gauche) de présentation finie. Il s'ensuit que la dernière catégorie est abélienne et que l'anneau $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$ est cohérent [SiSm, Prop.4]. Comme un module projectif de type fini est de présentation finie la dernière catégorie a suffisament d'objets projectifs. Soient $i \geq 0$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents, $M = Q \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}), N = Q \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{N})$. Observons que

$$Hom_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\simeq} Hom_{D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}}(D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}, N).$$

Comme tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent admet une résolution libre de rang fini sur $\mathcal{X}$, on voit qu'on dispose d'isomorphismes pour tout $i \geq 0$

$$Ext^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\simeq} Ext^i_{D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}}(M, N). \tag{3}$$

Notons

$$U_{K,0} := U(Lie(G_K))/Z_{K+}U(Lie(G_K)).$$

Par analogie avec la situation en caractéristique positive, cf. [Ho54],[Jan87], on peut considérer la cohomologie « restreinte » de $Lie(G_K)$

$$H^i_{\mathrm{res}}(Lie(G_K), M) := Ext^i_{U_{K,0}}(K, M)$$

pour $i \geq 0$ et un $U_{K,0}$-module M. Ces sont des foncteurs dérivés du foncteur des points fixes

$$M \mapsto M^{Lie(G_K)} := \{m \in M : xm = 0 \text{ pour tout } x \in Lie(G_K)\}$$

calculés sur la catégorie des $U_{K,0}$-modules. On a une flèche naturelle $H^i_{\mathrm{res}}(Lie(G_K), M) \to H^i(Lie(G_K), M)$ dans la cohomologie ordinaire de $Lie(G_K)$ qui, en général, n'est ni injective, ni surjective.

Lemme 4.1. *Supposons que l'indice de ramification e de $K/\mathbf{Q}$ satisfait $e < p-1$. L'inclusion naturelle $U_{K,0} \to D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$ est plate. Elle induit des isomorphismes*

$$Ext^i_{U_{K,0}}(M, N) \xrightarrow{\simeq} Ext^i_{D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}}(D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \otimes_{U_{K,0}} M, N)$$

pour tout $U_{K,0}$-module M et pour tout $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$-module N.

Démonstration. On identifie $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \simeq D^{an}(G^\circ)$ aprés 2.1.1 où $G^\circ = \widehat{G}^{\mathrm{rig}}$. Après la preuve du [HS15, 5.3.2], l'hypothèse $e < p-1$ implique que le sous-groupe des points rationels $G^\circ(K) \subset G(V)$ satisfait les conditions de [Em04, 5.3.11]. La complétion π-adique de $U(Lie(G))$ (et ensuite tensorisation avec $\mathbf{Q}$) est appelé $D^{an}(G^\circ)^{(0)}$ dans [Em04, 5.3.11] et $D^{an}(G^\circ)^{(0)} \to D^{an}(G^\circ)$ est plat. Mais $U(Lie(G)_K) = U(Lie(G))_K \to D^{an}(G^\circ)^{(0)}$ est plat après [Ber96, 3.2.3] ce qui achève la demonstration de la première assertion du lemme. La seconde en résulte par un argument standard : soit $P_\bullet \to M$ une résolution projective du $U_{K,0}$-module M. Par la platitude $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \otimes_{U_{K,0}} P_\bullet$ est une telle résolution du $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$-module $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \otimes_{U_{K,0}} M$. Il reste à passer à la cohomologie dans le complexe

$$Hom_{U_{K,0}}(P_\bullet, N) \xrightarrow{\simeq} Hom_{D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}}(D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \otimes_{U_{K,0}} P_\bullet, N).$$

$\square$

Pour $M = K$ on a $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0} \otimes_{U_{K,0}} K = K$ par [HS15, 5.1.3] et donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *Supposons que $e < p-1$. On a un isomorphisme entre $H^i_{\mathrm{res}}(Lie(G_K), N)$ et $Ext^i_{D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}}(K, N)$ pour tout $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q},0}$-module N.*

Pour les notions inhérentes à la cohomologie rigide nous renvoyons à [Ber89]. Rappelons que $\mathcal{X}$ est la variété de drapeaux de $\mathcal{G}$ et donc lisse et projective sur $\mathcal{S}$. Soient $Z \subset \mathcal{X}_\kappa$ un diviseur de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, Y l'ouvert complémentaire, $v : Y \hookrightarrow \mathcal{X}_\kappa$ l'immersion correspondante et $H^i_{\mathrm{rig}}(Y/K), i \geq 0$ les groupes de cohomologie rigide de Y. Soit $\mathcal{X}_K$ l'espace analytique rigide égal à la fibre générique de $\mathcal{X}$ et soit $sp : \mathcal{X}_K \to \mathcal{X}_\kappa$ le morphisme de spécialisation. Finalement, soit $v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ le faisceau des germes de fonctions surconvergentes le long de Z. Rappelons c'est un faisceau d'anneaux sur $\mathcal{X}_K$ à support dans $sp^{-1}(Y)$. Comme les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ et $v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules, ils sont munis d'une action de $U_{K,0}$ à travers l'application Q. On peut donc considérer les groupes de cohomologie restreinte de l'algèbre de Lie $Lie(G_K)$ en valeurs dans le module des sections globales du faisceau $v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$.

Proposition 4.3. *Supposons que $e < p - 1$. Pour tout $i \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(Y/K) \xrightarrow{\simeq} H^i_{\mathrm{res}}(Lie(G_K), \Gamma(\mathcal{X}_K, v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}))$$

pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. Le complément Z de Y étant un diviseur, on a $R^i sp_*(v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) = 0$ pour $i > 0$ [Ber89, 4.2]. Donc,

$$H^i_{\mathrm{rig}}(Y/K) = Ext^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}, sp_* v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$$

pour $i \geq 0$, cf. [Ber89, 4.1.7]. De plus, le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module $sp_* v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ est cohérent [Be96, 4.3.2]. On peut donc appliquer (3) et le corollaire en utilisant que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}) = K$. L'assertion en résulte. $\square$

L'utilisation des foncteurs dérivés $R^i sp_*$ pour $i > 0$ pour la proposition permet de traiter le cas où Z et une sous-variété fermée plus générale de $\mathcal{X}_\kappa$ [Ber89, 4.3.0]. De plus, la proposition est compatible avec le cup-produit et donne une isomorphisme d'anneaux de cohomologie $H^*_{\mathrm{rig}}(Y/K) \simeq H^*_{\mathrm{res}}(Lie(G_K), \Gamma(\mathcal{X}_K, v^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}))$. Finalement, la cohomologie « restreinte » en caractéristique zero ne semble pas avoir déjà été étudiée dans la littérature.

Références

[AW13] K. Ardakov and S. Wadsley. On irreducible representations of compact p-adic analytic groups. *Ann. of Math. (2)*, 178(2) :453–557, 2013.

[Beil84] A. Beilinson Localization of representations of reductive Lie algebras. *Proceedings of ICM Warsaw 1983*, Vol. 1, 2 :699–710, 1984.

[BB81] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *Comptes-rendus Acad. Sc.*, 292, p. 15–18, 1981.

[Ber96] P. Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 29, p.185–272, 1996.

[Ber00] P. Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques II descente par Frobenius. *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 81, p. 1–135, 2000.

[Ber89] P. Berthelot. Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules. In : p-adic analysis (Trento, 1989) *Springer LNM*, 1454, p. 80–124, 1990.

[Be96] P. Berthelot. Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323, No. 1, p. 35–40, 1996.

[dJ96] A. J. de Jong. Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (82) :5–96 (1996), 1995.

[DG70] M. Demazure and P Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éd., Paris, 1970.

[Gro60] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4) :228, 1960.

[Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *IHÉS Publ. Math.*, 32 :361, 1967.

[Em04] M. Emerton. Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups. *Preprint. To appear in : Memoirs of the AMS.*

[Ho54] G. Hochschild. Cohomology of restricted Lie algebras. *Amer. J. Math.*, 76 :555–580, 1954.

[Huy97] C. Huyghe. $\mathcal{D}^\dagger$-affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot. *Comp. Math.*, 108, No. 3, p. 277–318, 1997.

[Huy09] Noot-Huyghe, Christine. Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les D-modules arithmétiques. Bull. Soc. Math. France, 137, No. 2, p. 159–183, 2009.

[HS15] C. Huyghe and T. Schmidt Algèbres de distributions et $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. *Preprint*, 2015.

[Jan03] J.C. Jantzen. Representations of algebraic groups, volume 107 of *Math. Surveys and Monographs.* AMS, Providence, RI, 2nd ed., 2003.

[Jan87] J.C. Jantzen. Restricted Lie algebra cohomology. In : Algebraic groups. Utrecht 1986 *Springer LNM*, 1271 : 91–108, 1987.

[Ko66] B. Kostant. Groups over Z. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 90–98. AMS, Providence, R.I., 1966.

[NH09] Christine Noot-Huyghe. Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 137(2) :159–183, 2009.

[PSS16] D. Patel, T. Schmidt, and M. Strauch. Locally analytic representations of $GL(2,L)$ via semistable models of P^1. *J. Inst. Math. Jussieu*, doi : 10.1017/S1474748016000396, 2016.

[PSS13] D. Patel, T. Schmidt, and M. Strauch. Integral models of P^1 and analytic distribution algebras for GL_2. *Münster J. Math.*, 7 :241–271, 2014.

[ST03] P. Schneider, J. Teitelbaum Algebras of p-adic distributions and admissible representations.. *Invent. Math.*, 153 : 145–196, 2003.

[Sch] W. Schmid Geometric methods in representation theory. In : Poisson geometry, deformation quantisation and group representations. *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 232 : 273–323, 2005.

[SiSm] S.A. Sikko, S.O. Smalø. Coherent rings and homologically finite subcategories. *J. Math. Scand.*, 77 :175–183, 1995.