N° d'Ordre : 1386

THESE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

U.F.R. Mathématiques

pour obtenir

le grade de Docteur de l'Université de Rennes I

Mention Mathématiques et Applications

par

Christine HUYGHE

Sujet de la Thèse :

Construction et étude de la transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Soutenue le 8 Juin 1995 devant la Commission d'Examen

M.	ILLUSIE L.	**Président**
M.	MESSING W.	**Rapporteurs**
M.	RAYNAUD M.	
M.	BERTHELOT P.	**Examinateurs**
M.	LAUMON G.	
M.	LOESER F.	
M.	MORET-BAILLY L.	

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est de construire un analogue p-adique de la transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules en caractéristique 0 (cf [17]) et d'en donner les premières propriétés. Le noyau de la transformation de Fourier sera l'analogue p-adique de l'exponentielle, c'est-à-dire l'isocristal de Dwork $\mathcal{L}_\pi$, qui dépend du choix d'une racine de l'équation $\pi^{p-1} = -p$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$. D'après [16], le choix de π équivaut à la donnée d'un caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_p$, ce qui établit un parallèle avec la transformation de Fourier-Deligne.

Soient V un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques $(0, p)$ et K son corps des fractions. On suppose que V contient les racines de l'équation (dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$) : $x^{p-1} = -p$. Soit π une racine de cette équation. Le corps K est muni d'une norme qui prolonge la norme p-adique sur $\mathbf{Q}_p$ notée $|.|$. Définissons la complétée faible de l'algèbre de Weyl

$$A_N(K)^\dagger = \{a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_x^{[\underline{k}]} : a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \text{ et } \exists c, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|}\}.$$

Avec notre choix de π, cette algèbre est munie d'une anti-involution F, la transformation de Fourier "naïve", définie par $F(x_i) = -\partial_{x_i}/\pi$ et $F(\partial_{x_i}) = \pi x_i$. L'objet de ce travail est de construire une tranformation de Fourier géométrique, pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules, qui corresponde à cette transformation de Fourier. On rappelle que $\mathcal{D}^\dagger$ est le "complété faible" de l'anneau des opérateurs différentiels usuels et que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$ est son tensorisé par $\mathbf{Q}$.

Les différences entre cette construction et la construction usuelle en caractéristique zéro sont surtout d'ordre technique. Une première difficulté est que, pour rendre compte des conditions de surconvergence à l'infini des coefficients des opérateurs différentiels, il faut compactifier l'espace affine formel de dimension N en l'espace projectif formel de dimension N, $\mathcal{X} = \hat{\mathbf{P}}^N_V$. Sur cet espace, on introduit le faisceau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes à l'infini $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$ construit par Berthelot dans 4.2 de [6] et dont on rappelle que c'est un faisceau d'anneaux cohérent.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques résultats complémentaires concernant l'image inverse des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules, qui simplifieront le calcul de la transformation de Fourier. Nous montrons d'abord que l'image inverse d'un isocristal surconvergent au sens des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules coïncide avec l'image inverse au sens des isocristaux (et ce, même dans le cas où le morphisme n'est pas lisse). Nous terminons ce chapitre par un résultat d'invariance birationnelle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules.

En vue de la transformation de Fourier il nous faut établir l'équivalent des théorèmes A et B pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules sur l'espace projectif. Au chapitre 2 nous établissons plus généralement des théorèmes d'acyclicité pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents sur l'espace projectif. En effet, ce résultat d'acyclicité résulte en caractéristique zéro d'un résultat de Beilinson-Bernstein (cf [1]), pour les $\mathcal{D}$-modules sur l'espace projectif. Plus précisément nous commençons par l'étude de ce qui se passe à un niveau fini pour les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}(r)$ (où (r) désigne le twist de Serre par $\mathcal{O}_X(r)$). Nous savons déjà que la cohomologie de ces faisceaux est de torsion grâce au résultat en caractéristique zéro. Pour contrôler cette torsion nous étudions alors le faisceau gradué $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{D}^{(m)}$ et constatons qu'il peut s'interpréter en termes de *l'algèbre symétrique de niveau* m de l'espace tangent $\mathcal{T}_X$. Ecrivons l'espace tangent comme quotient d'une somme directe de copies de faisceaux $\mathcal{O}_X(1)$. Cela permet d'écrire l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{D}^{(m)}$ comme quotient d'une algèbre graduée dont le k-ième terme est une somme directe de copies de $\mathcal{O}_X(k)$. On en déduit que les faisceaux $\mathrm{gr}_k\mathcal{D}^{(m)}(r)$ sont acycliques pour k assez grand et que la cohomologie de tout $\mathcal{D}^{(m)}$-module cohérent sur l'espace projectif est de torsion finie, ce qui est en fait le point crucial. Le théorème d'acyclicité pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents est alors affaire de passages à la limite à la Mittag-Leffler. A partir de là, on obtient facilement le cas des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents. Notons que nous traitons ces résultats dans le cadre de coefficients plus généraux que $\mathcal{O}_X$, qui vérifient certaines conditions. En particulier, nous établissons aussi des résultats d'acyclicité pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents.

Au chapitre 3, nous utilisons ces résultats pour établir qu'il existe une équivalence de catégories entre les $A_N(K)^\dagger$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents sur l'espace projectif. Le point important est que l'on peut filtrer le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$ sur l'espace projectif par des faisceaux d'opérateurs différentiels qui soient des complétés de modules libres sur les anneaux $\mathcal{B}^{(m)}$ des coefficients surconvergents. A partir de là, le calcul des sections globales de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$ est très simple. On pourrait d'ailleurs aussi en déduire un théorème d'acyclicité pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. Le deuxième ingrédient consiste en des théorèmes de platitude ...techniques.

Nous revenons à la transformation de Fourier dans le chapitre 4. Rappelons que le choix de π équivaut à la donnée d'un caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_p$, ce qui fournit un parallèle avec la transformation de Fourier-Deligne l-adique. Soient $\mathcal{X} = \hat{\mathbf{P}}^N_V$ l'espace projectif formel de dimension N, $\mathcal{Y}$ l'espace projectif dual, qu'on regarde tous deux comme compactification de l'espace affine de dimension N et $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ qui est muni des projections p_1 et p_2 sur $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ respectivement. Nous construisons d'abord un éclatement lisse $\tilde{\mathscr{Z}}$, de $\mathscr{Z}$ sur lequel on peut définir un prolongement λ à valeurs dans $\hat{\mathbf{P}}^1_V$, du crochet de dualité de $\hat{\mathbf{A}}^N_V \times \hat{\mathbf{A}}^N_V \to \hat{\mathbf{A}}^1_V$. Avec notre choix de π nous pouvons introduire l'isocristal de Dwork $\mathscr{L}_\pi$ sur $\hat{\mathbf{P}}^1_V$, qui correspond du point de vue des $\mathscr{D}$-modules à "exp(πt)". Le module $\lambda^! \mathscr{L}_\pi$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\tilde{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent auquel est associé un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, grâce au théorème d'invariance birationnel, toujours noté $\lambda^! \mathscr{L}_\pi$. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérent, on définit $\mathscr{F}(\mathscr{M}) = p_{2+}(\lambda^! \mathscr{L}_\pi \otimes^{\mathbf{L}} p_1^! \mathscr{M})$. Nous disposons alors d'un théorème de comparaison avec la transformation de Fourier naïve

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{F}(\mathscr{M})) \simeq F(\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{M}))[n-2].$$

Pour cela, nous nous ramenons au cas de $\mathscr{M} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ où nous faisons un calcul explicite. Les complexes intervenant dans ce calcul sont, comme en caractéristique zéro, des complexes de Spencer tordus. Toutefois il est ici plus délicat de travailler avec ces complexes, car nous ne disposons plus de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels, et les complexes analogues modulo π^n n'ont pas les propriétés d'acyclicité souhaitées. De façon similaire nous introduisons la transformation de Fourier à support compact $\mathscr{F}_!$ (obtenue en remplaçant p_{2+} par $p_{2!}$ dans la formule précédente) et, en utilisant le théorème de dualité relative pour les morphismes propres dû à A.Virrion (cf [19]), nous montrons enfin qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\mathscr{F}_!(\mathscr{M}) \simeq \mathscr{F}(\mathscr{M}).$$

Chapitre 1

Compléments sur l'image inverse des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules.

Nous commençons par fixer quelques notations et faire quelques rappels concernant le faisceau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes le long d'un diviseur relatif $\mathscr{Z}$ d'un schéma formel lisse $\mathscr{X}$, noté $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$. Ces faisceaux ont été introduits par P. Berthelot (cf [6]). Nous donnons en outre quelques résultats généraux sur l'image inverse d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$-module cohérent, sans hypothèse de lissité sur le morphisme, dans des cas qui interviendront dans ce travail. Nous obtenons ainsi d'une part un théorème de comparaison entre l'image inverse au sens des $\mathscr{D}^\dagger({}^\dagger\mathscr{Z})$-modules et l'image inverse au sens des isocristaux surconvergents. Nous prouvons d'autre part un théorème d'invariance birationnelle, qui montre que dans ce cas, la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$-modules cohérents ne dépend que du complémentaire du diviseur $\mathscr{Z}$.

1.1 Notations.

Soient V un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0,p)$, π une uniformisante, $\mathscr{V}$ son complété p-adique, K son corps des fractions, S le schéma Spec$V$ et $\mathscr{S}$ le schéma formel Spf$\mathscr{V}$. Soit $\mathscr{X}$ un schéma formel lisse sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{Z}$ un diviseur relatif de $\mathscr{X}$. L'ouvert complémentaire de $\mathscr{Z}$ sera noté $\mathscr{U}$. Les réductions modulo π^{i+1} des schéma formels $\mathscr{X}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{U}$ seront notés par un i en indice. Si la situation provient d'une situation analogue sur V, on notera les schémas correspondant sur V : X, U, Z où X est un S-schéma lisse, U est un ouvert de X et Z est un diviseur relatif de X.

1.1.1 Opérateurs différentiels. Pour la construction et les propriétés des faisceaux d'opérateurs différentiels arithmétiques, nous renvoyons à [6], nous contentant de rappeler ici ce dont nous aurons besoin. Considérons $\mathscr{I}$, l'idéal de l'immersion diagonale : $X_i \to X_i \times_S X_i$, et $\mathscr{P}_{(m)}$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $(\mathscr{O}_{X_i\times X_i}, \mathscr{I})$. La PD-structure sur $\mathscr{P}_{(m)}$ sera notée $(\mathscr{K}, \mathscr{L}, \delta)$. L'algèbre $\mathscr{P}_{(m)}$ est munie de la filtration m-PD-adique par les $\mathscr{K}^{\{n+1\}}$. On désignera par $\mathscr{P}^n_{(m)}$ la PD-algèbre $\mathscr{P}_{(m)}/\mathscr{K}^{\{n+1\}}$, qu'on peut voir comme un faisceau sur X_i et qui est munie de la filtration induite par la filtration m-PD-adique. On rappelle que

$$\mathscr{D}^{(m)}_{X_i,n} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X_i}}(\mathscr{P}^n_{(m)}, \mathscr{O}_{X_i}),$$

et que $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i} = \varinjlim_n \mathscr{D}^{(m)}_{X_i,n}$. Cette construction peut bien sûr être faite sur X ou sur $\mathscr{X}$. On pose alors $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$.

1.2 Description locale.

Donnons une description locale des sections de ces faisceaux. Soit $(x_1, \ldots, x_N)$ un système de coordonnées locales sur $\mathscr{X}$ (et donc sur X_i). Alors, les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}_{\underline{x}}$ forment une base de $\mathscr{D}_{X_i}$, le faisceau des opérateurs différentiels usuels, comme $\mathscr{O}_{X_i}$-module (cf [EGA IV, 16.11.2]). Soit $k \in \mathbf{N}$. Notons $q^{(m)}_k$ le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Etant donné un multi-indice $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_N)$, nous noterons

$$q^{(m)}_{\underline{k}}! = \prod_i q^{(m)}_{k_i}!.$$

Introduisons encore $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)}_{\underline{x}} = q^{(m)}_{\underline{k}}! \underline{\partial}^{[\underline{k}]}_{\underline{x}}$. Le faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$ est alors un $\mathscr{O}_{X_i}$-module libre ayant pour base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)}_{\underline{x}}$. Remarquons (cf 2.2.5 de [6]) que $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$ est alors engendré par les opérateurs $\{\partial^{\langle p^i \rangle (m)}_{x_j}\}_{1 \leq j \leq N}$ tels que $i \leq m$, comme $\mathscr{O}_X$-algèbre, et qu'il est noethérien.

1.2.1 Inégalités. Définissons enfin certains coefficients qui apparaissent dans les formules : nous poserons

(i) Si $k, k' \in \mathbf{N}$ et si $k'' = k - k'$, $\left\{ {k \atop k'} \right\} := q_k!/q_{k'}!q_{k''}!$.

(ii) Si $k, k' \in \mathbf{N}$, $\left\langle {k \atop k'} \right\rangle := \binom{k}{k'} \left\{ {k \atop k'} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)}$.

Terminons par des inégalités que nous serons amenés à utiliser. On vérifie facilement que si $\underline{k}$ est un multi-indice de longueur N :

$$\begin{array}{rcccl} \dfrac{k}{p^m} - 1 & \leq & q^{(m)}_k & \leq & \dfrac{k}{p^m}, \\ \dfrac{|\underline{k}|}{p-1} - N \log_p(|\underline{k}| + 1) - N & \leq & v_p(\underline{k}!) & \leq & \dfrac{|\underline{k}|}{p-1}, \\ \dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)} - N \log_p(|\underline{k}| + 1) - \dfrac{Np}{p-1} & \leq & v_p(q^{(m)}_{\underline{k}}!) & \leq & \dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)}. \end{array}$$

1.3 Opérateurs à coefficients surconvergents.

Revenons à la situation initiale où l'on considère un diviseur relatif sur $\mathcal{X}$. Les notations qui suivent valent alors aussi pour X. Si f est une équation locale du diviseur Z_i sur un ouvert U' de X_i, on pose

$$\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}(U') = \mathcal{O}_{X_i}(U')[T]/f^{p^{m+1}}T - p.$$

Du fait que $\mathcal{Z}$ est un diviseur relatif ces faisceaux se recollent en un faisceau $\mathcal{B}_i^{(m)}$. De plus, le faisceau $\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}$ est muni d'une action du faisceau des opérateurs différentiels (cf 4.2.1 [Bel]), de sorte que le faisceau $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(\infty) = \mathcal{B}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux qui est cohérent d'après 3.1.2 de [Bel]. Si l'on désire préciser le diviseur, on notera ce faisceau $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(Z_i)$. On introduit aussi $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}^{(m)}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\dagger} = \varinjlim_m \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty) = \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(\infty)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) = \varinjlim_m \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ qu'on notera encore $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$ si l'on veut préciser le diviseur. En outre, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{X_i}$-module cohérent (respectivement un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module cohérent), $\tilde{\mathcal{F}}$ est le $\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}$-module $\mathcal{B}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{B}_X^{(m)} \otimes \mathcal{F}, \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes \mathcal{F}$).

1.4 Rappels des définitions et propriétés des images directes et inverses des $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$-modules.

1.4.1 Définitions. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux schémas formels lisses sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ des diviseurs relatifs, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les ouverts complémentaires. Introduisons $d = \dim\mathcal{X} - \dim\mathcal{Y}$. Considérons un homomorphisme de $\mathcal{S}$-schémas formels $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, tel que $f(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$ et notons f_i le morphisme induit : $Y_i \to X_i$. On dispose alors d'un homomorphisme canonique : $f_i^{-1}\mathcal{B}_{X_i}^{(m)} \to \mathcal{B}_{Y_i}^{(m)}$. On note :

$$\mathcal{D}_{Y_i \to X_i}^{(m)}(\infty) = \mathcal{B}_{Y_i}^{(m)} \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}} f_i^{-1}\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(\infty) = \mathcal{B}_{Y_i}^{(m)} \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{O}_{X_i}} f_i^{-1}\mathcal{D}_{X_i}^{(m)},$$

c'est un $f_i^{-1}\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(\infty)$-module à droite et un $\mathcal{D}_{Y_i}^{(m)}(\infty)$-module à gauche. Notons encore :

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X}}^{(m)}(\infty) = \varprojlim_i \mathcal{D}_{Y_i \to X_i}^{(m)}(\infty)$$

et

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) = \varinjlim_m \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$$

ou encore $\mathcal{D}_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$, si l'on souhaite préciser le diviseur. On introduit d'autre part

$$\mathcal{D}_{X_i \leftarrow Y_i}^{(m)} = \tilde{\omega}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{B}_{Y_i}^{(m)}} \mathcal{D}_{Y_i \to X_i}^{(m)}(\infty) \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{B}_{X_i}^{(m)}} f_i^{-1}\tilde{\omega}_{X_i},$$

c'est un $f_i^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}(\infty)$-module à gauche et un $\mathscr{D}^{(m)}_{Y_i}(\infty)$-module à droite. Nous introduisons de plus

$$\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y}}(\infty) = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{X_i\leftarrow Y_i} = \tilde{\omega}_{\mathscr{Y}} \otimes_{\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}} \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{Y}\rightarrow\mathscr{X}}(\infty) \otimes_{f^{-1}\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathscr{X}},$$

et

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_m \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty),$$

encore noté $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$.

Définitions

(i) Soit $\mathscr{M} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T}))$, alors :

$$f^!(\mathscr{M}) = \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\rightarrow\mathscr{X}}({}^\dagger\mathscr{Z}) \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})} f^{-1}(\mathscr{M})\,[d].$$

(ii) Soit $\mathscr{N} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}))$, alors :

$$f_+\mathscr{N} = \mathbf{R}f_*\left(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T})} \mathscr{N}\right).$$

On définit de la même façon $f_{i+}, f_i^!, f^{!(m)}$ et $f_+^{(m)}$.

1.4.2 Propriétés. Ces propriétés seront énoncées sans démonstration. On renvoie à [7] pour celles-ci.

1.4.2.1 Proposition. *Avec les notations de 1.4.1, si f est propre, si $f^{-1}(\mathscr{T}) = \mathscr{Z}$ et si $\mathscr{M} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}))$, alors $f_+(\mathscr{M}) \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T}))$.*

Cet énoncé est aussi valable à un niveau fini.

1.4.2.2 Proposition. *Si f est lisse et si $\mathscr{N} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T}))$ alors $f^!(\mathscr{N}) \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}))$.*

1.5 Comparaison avec l'image inverse d'un isocristal surconvergent.

1.5.1 Lemme. *Soit $0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow 0$ une suite exacte de $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{Y}}$-modules telle que :*

(i) S est sans p-torsion,

(ii) T est un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module de type fini.

Alors il existe une suite exacte de $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}^{(m)}$-modules : $0 \to \hat{R} \to \hat{S} \to T \to 0$.

Démonstration. Soient $T_i = \mathcal{T}or_1^V(V/p^i, T) = \ker(T \xrightarrow{p^i} T)$ et T^t la partie de torsion de T, qui est un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module de type fini par noethérianité de $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$. Le schéma Y étant quasi-compact, il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $p^a T^t = 0$ et donc, pour $i \geq a$, $T_i = T^t$. Alors, si $j \geq 0$, le morphisme $V \xrightarrow{p^j} V$ induit la multiplication par $p^j : T_{i+j} \to T_i$ si bien que pour $i, j \geq a$, ce morphisme est nul. Le système projectif des T_i est donc essentiellement nul.

De la suite exacte : $0 \to R \to S \to T \to 0$, on tire des suites exactes :

$$0 \to T_i \to R/p^i \to S/p^i \to T/p^i \to 0,$$

qui se scindent en deux suites exactes :

$$0 \to T_i \to R/p^i \to A_i \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to A_i \to S/p^i \to T/p^i \to 0.$$

Comme le système projectif des T_i est essentiellement nul, on obtient un isomorphisme $\hat{R} \simeq \varprojlim_i A_i$. Par passage aux complétés, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \to \hat{R} \to \hat{S} \to \hat{T} \to 0.$$

Comme T est de type fini sur $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$, il est complet, et on obtient la suite exacte annoncée.

1.5.2 On note X la réduction modulo p du schéma formel $\mathcal{X}$ (resp. U, T les réductions de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{T}$) et sp le morphisme de spécialisation de la fibre générique $\mathcal{X}_K$ de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{X}$. Soit E un isocristal sur U, surconvergent le long de T. Soient $\mathcal{Y}$ un schéma formel lisse sur $\mathcal{S}$, muni d'un diviseur $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}'$ l'ouvert complémentaire du diviseur, et f un morphisme de $\mathcal{S}$-schémas formels, qui vérifient les hypothèses de 1.4.1. On note Y, Z, U' la réduction de la situation modulo p et $\mathcal{Y}_K$ la fibre générique de $\mathcal{Y}$. Le morphisme f induit un morphisme f_K entre les espaces rigides $\mathcal{Y}_K$ et $\mathcal{X}_K$ et un morphisme f_0 entre Y et X. Alors, d'après le théorème 4.4.12 de [6], l'image directe par spécialisation $\mathcal{E}$, de E, est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{T})$-module cohérent. On dispose aussi au sens des isocristaux, de f^*E ; soit $\mathcal{G} = sp_* f^* E$ le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$-module qui lui est associé sur $\mathcal{Y}$. On se propose ici de comparer $\mathcal{G}$ et l'image inverse $f^!(\mathcal{E})$, comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$-modules.

1.5.3 Lemme. *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}$-modules : $\mathcal{G} \simeq f^*\mathcal{E}$.*

Rappelons que d'après 4.4.2 de [6], le morphisme de spécialisation induit une équivalence de catégories entre les $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-modules et les $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules (la définition du foncteur $j^\dagger$ est rappelée ci-dessous). L'objet de ce lemme est de montrer que cette équivalence est compatible à l'image inverse. Par construction, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{Y} \arrow[d] \\ U \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ & \operatorname{Spec} k \arrow[r, hook] & \mathcal{S}. \end{tikzcd}$$

Rappelons d'abord comment est défini $f^*(E)$ (on se réfère ici à 2.3 de [5]). Soit $\rho_m = p^{-1/p^{m+1}}$. Reprenons les définitions de [6]. Si $\mathcal{W}$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{X}$ sur lequel $\mathcal{Z}$ est donné par une équation locale $\xi = 0$, alors $W = sp^{-1}(\mathcal{W})$ est un ouvert affinoide de $\mathcal{X}_K$, ainsi que $W_m = \{x \in W \colon |\xi(x)| \geq \rho_m\}$. Pour m assez grand, les ouverts W_m ne dépendent pas du choix de ξ et se recollent en un voisinage strict de W encore noté W_m. La construction analogue sur $\mathcal{Y}_K$ définit un voisinage strict de W' : W'_m. Soit α_m l'inclusion de W_m dans $\mathcal{X}_K$. Il existe une suite d'entiers n_m tels que $f_K(W'_{n_m}) \subset W_m$. Notons alors $\alpha_{m,m'}$ et $\alpha'_{m,m'}$ les inclusions de $W_{m'}$ dans W_m, et de $W'_{m'}$ dans W'_m, ainsi que α_m l'inclusion de W'_m dans $\mathcal{Y}_K$. Enfin, si E est un $\mathcal{O}_{W_m}$-module, on pose $j^\dagger_m E = \varinjlim_{m'\geq m} \alpha_{m,m'*}\alpha^*_{m,m'}E$ et $j^\dagger E = \alpha_{m*} j^\dagger_m E$. Les foncteurs analogues sur $\mathcal{Y}_K$ sont notés $j'^\dagger_m$ et $j'^\dagger$. Soit E un isocristal sur X surconvergent le long de T, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, et un fibré à connexion intégrable E_0 sur W_{m_0}, surconvergent le long de T, tel que E soit isomorphe à $j^\dagger E_0$. Au sens des isocristaux, le $j'^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_K}$-module :

$$j'^\dagger \left(\mathcal{O}_{W'_{n_{m_0}}} \otimes_{f_K^{-1}\mathcal{O}_{W_{m_0}}} f_K^{-1} E_0\right),$$

est une réalisation de l'image inverse de E, notée $f^*(E)$. Considérons ensuite le diagramme commutatif d'espaces annelés :

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{Y}_K, j'^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_K}\right) & \xrightarrow{sp} & \left(\mathcal{Y}, \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}\right) \\ \downarrow f_K & & \downarrow f \\ \left(\mathcal{X}_K, j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}\right) & \xrightarrow{sp} & \left(\mathcal{X}, \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}\right). \end{array}$$

On dispose d'un homomorphisme canonique :

$$f^* sp_* E \to sp_* f_K^* E.$$

En outre, ces deux faisceaux sont deux $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, si bien que, d'après 4.3.10 de [6], il suffit de vérifier sur le complémentaire du diviseur $\mathcal{T}$ que la flèche précédente est un isomorphisme pour voir que c'est un isomorphisme global. Pour faire le calcul, il suffit donc de considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left(U', \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_K}\right) & \stackrel{sp}{\rightarrow} & \left(\mathcal{U}', \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{U}',\mathbb{Q}}\right) \\ \downarrow f_K & & \downarrow f \\ \left(\mathcal{U}_K, j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{U}_K}\right) & \stackrel{sp}{\rightarrow} & \left(\mathcal{U}, \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{U},\mathbb{Q}}\right). \end{array}$$

Nous sommes donc finalement ramenés à prendre l'image inverse au sens des isocristaux convergents. Rappelons d'abord que l'on a un isomorphisme canonique : $sp_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}_K} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \otimes K$. L'assertion est locale sur $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{U}_i$ un ouvert affine de $\mathcal{U}$ sur lequel $\mathcal{E} = sp_*(E)$ soit projectif de rang fini; comme $\mathcal{U}_i$ est affine, cela revient à dire que $\mathcal{E}(\mathcal{U}_i)$ est un $\mathcal{O}(\mathcal{U}_i) \otimes K$-module projectif de rang fini. Soient $\mathcal{U}'_i$ un ouvert affine de $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$, $U_i = sp^{-1}(\mathcal{U}_i)$ et $U'_i = sp^{-1}(U_i)$; alors

$$\Gamma(\mathcal{U}'_i, f^*(\mathcal{E})) = \mathcal{O}(\mathcal{U}'_i) \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{U}_i)} \mathcal{E}(\mathcal{U}_i).$$

En outre, le module $E(U_i) = \mathcal{E}(\mathcal{U}_i)$ est un aussi un $\mathcal{O}(U_i)$-module projectif de rang fini, et

$$\Gamma(U'_i, f_K^*(E)) = \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_K}(U'_i) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}_K}(U_i)} E(U_i).$$

Finalement, on voit que $\Gamma(\mathcal{U}'_i, sp_* f_K^*(E)) = \Gamma(U'_i, f_K^*(E)) = \Gamma(\mathcal{U}'_i, \mathcal{E})$, puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_K}(U'_i) = \mathcal{O}_{\mathcal{U}'}(\mathcal{U}'_i) \otimes K$. Ceci achève la démonstration du lemme.

1.5.4 Proposition. *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules :*

$$\mathcal{G} \simeq f^!\mathcal{E}\,[-d].$$

En particulier, $f^!\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-module cohérent.

Démonstration. D'après le lemme 1.5.3, le module $\mathcal{G}$ est canoniquement isomorphe à $f^*\mathcal{E} = \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathcal{E}$. Calculons maintenant $f^!\mathcal{E}$. D'après les résultats 4.4.5 à 4.4.12 de [6], il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_m), et une suite de $\hat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules localement projectifs de rang fini $\mathcal{E}^{(m)}$ tels que :

(i) les modules $\mathcal{E}^{(m)}$ sont des $\hat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche,

(ii) le morphisme canonique $\hat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\hat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}^{(m)}$ est un isomorphisme,

(iii) les morphismes $\mathcal{E}^{(m)} \to \mathcal{E}^{(m+1)}$ sont $\hat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaires à gauche.

En outre, $\mathcal{E}^{(m+1)}$ est un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent et on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{E}^{(m+1)} \simeq (\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(1)}.$$

Comme cette structure de $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module est nilpotente, il existe un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathcal{F}^{(m+1)}$, muni d'une structure de $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module, pour laquelle il est cohérent (cf 4.4.7 de [6]), tel que $\mathcal{E}^{(m+1)} \simeq \mathcal{F}^{(m+1)}_{\mathbb{Q}}$, comme $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module. On peut alors remarquer que :

$$\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{E} \simeq \varinjlim_m \left(\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{F}^{(m+1)}_{\mathbb{Q}} \right)$$

et que

$$f^!\mathcal{E}[-d] = \varinjlim_m \left((\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}} \hat{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{F}^{(m+1)} \right).$$

Soit $\mathcal{M}$ un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche, notons λ_m le morphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{M} & \to & (\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{M} \\ b \otimes m & \mapsto & (b \otimes 1) \otimes m. \end{array}$$

A présent, fixons m. On pose alors : $\lambda = \lambda_m$, $\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} = \hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}}$, $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}}$, $\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} = \hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$, $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{B}}^{(n_{m+1})}_{\mathcal{Y}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(m+1)}$ et $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathfrak{X}} = \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \hat{\otimes}_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}$.

1.5.4.1 Lemme. *L'application λ induit un isomorphisme $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-linéaire :*

$$\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \simeq \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}.$$

Le fait que λ induit un isomorphisme se vérifie localement : considérons un ouvert $\mathcal{W} \subset \mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{F}_{|\mathcal{W}}$ admette une résolution libre de type fini $L_\bullet$, comme $\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}$-module, et un ouvert $\mathcal{W}' \subset \mathcal{Y}$ tel que $f(\mathcal{W}') \subset \mathcal{W}$. On a un isomorphisme $L_i \simeq (\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})^{a_i}$. Comme $L_\bullet$ est une résolution $\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}$-plate de $\mathcal{F}$, le complexe $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}$ est calculé par le complexe $C_\bullet$ où $C_i \simeq \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} (f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})^{a_i}$. En outre, le complexe $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathfrak{X}} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{F}$ est calculé par le complexe $C'_\bullet$ où $C'_i = (\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y} \to \mathfrak{X}})^{a_i}$. De plus, le module C'_i est le complété p-adique de C_i et le morphisme μ induit par λ entre les complexes $C_\bullet$ et $C'_\bullet$ est le morphisme canonique de passage au complété, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $\mu(b \otimes p) = b \hat{\otimes} p$.

Considérons maintenant $B_k = \mathrm{Im}(C_{k+1} \to C_k)$ et $Z_k = \mathrm{Ker}(C_k \to C_{k-1})$. Pour tout $k \geq 0$, on a donc $Z_k/B_k = \mathcal{T}or_k^{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}}(\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}, f^{-1}\mathcal{F})$. Par définition, il existe des suites exactes (G_k) :

$$0 \to Z_k \to C_k \to B_{k-1} \to 0.$$

Or B_{k-1} se plonge dans C_{k-1} qui est sans p-torsion. On en déduit des suites exactes : $0 \to Z_k/p^i \to C_k/p^i \to B_{k-1}/p^i \to 0$, d'où des suites exactes :

$$0 \to \hat{Z}_k \to C'_k \to \hat{B}_{k-1} \to 0.$$

On dispose d'autre part de suites exactes : $0 \to B_k \to Z_k \to Z_k/B_k \to 0$, où Z_k/B_k est un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}$-module de type fini, car il est isomorphe à $\mathcal{T}or_k^{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}}(\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}, f^{-1}\mathcal{F})$. En particulier ces modules Z_k/B_k sont p-adiquement complets. Nous pouvons appliquer le lemme 1.5.1, de sorte qu'il existe des suites exactes :

$$0 \to \hat{B}_k \to \hat{Z}_k \to Z_k/B_k \to 0.$$

Finalement ces calculs montrent que la cohomologie de $C'_\bullet$ s'identifie, en degré k, à $\hat{C}_k/\hat{B}_k$, et est isomorphe, via λ, à la cohomologie de $C_\bullet$. Ces deux complexes sont donc quasi-isomorphes. Comme $\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$ est un module localement projectif, le complexe $C_\bullet \otimes K$ est acyclique et il en va de même pour $C'_\bullet \otimes K$. En degré zéro, on trouve un isomorphisme toujours noté λ : $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}} f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{Q}} \simeq \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \otimes_{f^{-1}\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}} f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Pour achever la démonstration de la proposition, montrons maintenant que λ est $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}$-linéaire. Notons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les modules $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$ et $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} \otimes f^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$. L'assertion est locale sur $\mathcal{X}$. Plaçons-nous sur un ouvert $\mathcal{W}'$ de $\mathcal{Y}$, muni de coordonnées locales $y_1, \ldots, y_k$, tel que $f(\mathcal{W}')$ soit inclus dans un ouvert affine $\mathcal{W}$ de $\mathcal{X}$, muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_l$. Soient $\partial_i = \partial_{y_i}$ et $\partial'_j = \partial'_{x_j}$. Comparons d'abord l'action des dérivations sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Soit α le morphisme canonique : $\mathcal{D}er_{\mathcal{Y}} \to f^*\mathcal{D}er_{\mathcal{X}}$, et $\alpha(\partial_i) = \sum_{j=1}^{l} \beta_{i,j} \otimes \partial_j$. Si $h \otimes x \in \mathcal{C}_1$, on calcule l'action de ∂_i sur $h \otimes x$ et sur $\lambda(h \otimes x)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\partial_i \cdot h \otimes x &= \partial_i(h) \otimes x + \sum_{j=1}^{k} h\beta_{i,j} \otimes \partial_j(x), \\
\partial_i \cdot \lambda(h \otimes x) &= \partial_i \cdot (h \otimes 1) \otimes x, \\
&= \partial_i(h) \otimes 1 \otimes x + \sum_{j=1}^{k} (h\beta_{i,j} \otimes \partial_j) \otimes x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \partial_i(h) \otimes 1 \otimes x + \sum_{j=1}^{k} h\beta_{i,j} \otimes 1 \otimes \partial_j(x), \\ &= \lambda(\partial_i \cdot h \otimes x). \end{aligned}$$

Et l'application λ commute à l'action des dérivations.

Soit maintenant $P = \sum_{|\underline{k}|\leq N} a_{\underline{k}}(y)\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle(m)} \in \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$. Du fait que l'on a la relation $(k_i!/q_{k_i}!)\partial_i^{\langle k_i\rangle(m)} = \partial_i^{k_i}$, λ commute à l'action de P. Le faisceau $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ s'identifie au complété de $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ pour la topologie p-adique, qui au moins localement, est induite par une norme. D'autre part, l'homomorphisme λ est continu pour la topologie p-adique puisqu'il provient d'un homomorphisme entre des modèles entiers de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$ et l'action de $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est continue pour cette topologie. Soit donc $P \in \hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$, écrivons $P = \lim_{k\to\infty} P_k$ où $P_k \in \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$. Alors, si $h \otimes x \in \mathcal{C}_1$, par continuité des applications considérées, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(P \cdot h \otimes x) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(P_k \cdot h \otimes x), \\ &= \lim_{k\to\infty} P_k \cdot \lambda(h \otimes x), \\ &= P \cdot \lambda(h \otimes x), \end{aligned}$$

D'où la $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-linéarité de λ. En passant à la limite inductive sur tous ces isomorphismes, on en déduit un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-linéaire comme cherché.

1.6 Un théorème d'invariance birationnelle.

1.6.1 On généralise ici le théorème 2.3.1 de [5] au cas des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules. La situation est la suivante : soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux schéma formels lisses sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Z}$ deux diviseurs relatifs de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les ouverts complémentaires. On se donne maintenant un morphisme de $\mathcal{S}$-schémas formels $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, tel que f induise une immersion ouverte : $f^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$. On commence par énoncer quelques lemmes techniques qui interviendront dans la démonstration du lemme-clef de cette sous-section.

1.6.2 Lemme. *Soient $\mathcal{W}$ un ouvert affine de $\mathcal{Y}$ sur lequel $\mathcal{Z}$ est défini par l'équation $\xi = 0$ et $h \in \hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{W} \cap D(\xi))$. Alors il existe $m' \in \mathbb{N}$ tel que $ph \in \hat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{W})$.*

Démonstration. Du fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ est sans torsion et que ξ n'est pas diviseur de 0 modulo p, il existe une injection : $\mathcal{O}(\mathcal{W})/p\mathcal{O}(\mathcal{W}) \to \mathcal{O}(\mathcal{W})[1/\xi]/p\mathcal{O}(\mathcal{W})[1/\xi]$. Le deuxième s'identifie à son complété p-adique, qui est $\mathcal{O}(\mathcal{W})\{1/\xi\}/p\mathcal{O}(\mathcal{W})\{1/\xi\}$, de sorte que l'on a en fait une injection :

$$\mathcal{O}(\mathcal{W})/p\mathcal{O}(\mathcal{W}) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathcal{W})\left\{\frac{1}{\xi}\right\} \Big/ p\mathcal{O}(\mathcal{W})\left\{\frac{1}{\xi}\right\}.$$

Soit maintenant $h \in \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\mathcal{W}) \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{W} \bigcap D(\xi))$, alors il existe $r \in \hat{\mathscr{B}}^{(m)}(\mathcal{W})$ et $h' \in \mathscr{B}^{(m)}_{\mathbf{Q}} = \mathcal{O}(\mathcal{W})[1/\xi]_{\mathbf{Q}}$ tels que $h = h' + r$. En fait h' est dans $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathbf{Q}} \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{W} \bigcap D(\xi))$. On en déduit l'existence d'un $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\xi^{n_0}h = k \in \mathcal{O}(\mathcal{W})_{\mathbf{Q}} \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{W} \bigcap D(\xi))$. Choisissons s minimal tel que $p^s k = l \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$. Si $s = 0$, cela signifie que $k \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$; si $s \geq 1$, $i(\bar{l}) = 0$ où $\bar{l}$ est l'image de l dans $\mathcal{O}(\mathcal{W})/p\mathcal{O}(\mathcal{W})$. Donc l s'écrit pl' avec $l' \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$ et on a la relation $p^{s-1}k = l' \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$, ce qui contredit la minimalité de s. On voit finalement que $k \in \mathcal{O}(\mathcal{W})$ et il suffit alors de choisir $m' \geq m$ tel que $p/\xi^{n_0} \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}(\mathcal{W})$ pour obtenir le lemme.

1.6.3 Lemme. *Avec les hypothèses du lemme précédent, soit $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$ tel que h soit inversible sur $\mathcal{V} \cap D(\xi)$, alors il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que $ph^{-1} \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}(\mathcal{V})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}_K$ la fibre générique de $\mathcal{V}$. On continuera à utiliser les notations $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{Z}$ pour l'intersection de ces espaces avec $\mathcal{V}$ et on notera U' et Z leur réduction modulo p, $]U'[$ et $]Z[$ leurs tubes dans $\mathcal{V}_K$ (c'est à dire leurs images inverses par sp). Les hypothèses signifient que $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}_K}(\mathcal{V}_K)$ est inversible sur $]U'[$. Donc l'ensemble analytique des zéros de h dans $\mathcal{V}_K$, $V(h)$, est inclus dans $]Z'[$. Sur $V(h)$, la norme spectrale $|\xi|_{sp}$ de ξ atteint son maximum en $x_0 \in V(h)$. Comme $x_0 \in]Z[$, il existe $\alpha < 1$ tel que $|\xi(x_0)| < \alpha < 1$. Finalement, sur le tube fermé défini par $|\xi|_{sp} \geq \alpha$, h est inversible, ce qui revient précisément à dire que $h^{-1} \in \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}(\mathcal{V})$ pour m assez grand. On peut alors appliquer le lemme précédent à h et cela conclut la démonstration du lemme.

1.6.4 Proposition. *Sous les hypothèses de 1.6.1, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$-modules :*

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}) \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}).$$

Démonstration. Tout d'abord, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$-module à gauche et le module $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$ possède une section canonique $1 \otimes 1$, de sorte que l'on a une flèche canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}) & \to & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}) \\ P & \to & P \cdot (1 \otimes 1). \end{array}$$

Voir que λ est un isomorphisme est une question locale ; on peut donc supposer que $\mathcal{X}$ est un ouvert affine muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_N$, sur lequel le diviseur $\mathcal{T}$

est donné par une équation $\xi = 0$. On peut aussi supposer que $\mathscr{Y}$ est affine, muni de coordonnées locales $y_1, \ldots, y_N$. Soit j l'injection de $\mathscr{U}'$ dans $\mathscr{Y}$. D'après 4.3.10 de [6], les faisceaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$ se plongent respectivement dans $j_*j^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$ et dans $j_*j^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$. De plus, en restriction à $\mathscr{U}$, l'application λ est un isomorphisme. Cela montre que λ est injectif sur $\mathscr{Y}$.

Pour voir que λ est surjectif, nous construisons une section de λ. Nous examinons d'abord la situation à un niveau fini. Fixons $m \in \mathbf{N}$, l'application λ provient d'une application $\lambda_m : \Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{Y}}) \to \Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X}})$ où $\Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{Y}})$ est le $\mathscr{O}_Y$-module libre de base les $\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ et $\Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X}})$ est le $\mathscr{O}_Y$-module libre de base les $\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$. Considérons les sous-$\mathscr{O}_Y$-modules libres $\mathscr{M} = \oplus_{|\underline{k}|\leq p^m} \mathscr{O}_{\mathscr{Y}} \underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ et $\mathscr{N} = \oplus_{|\underline{k}|\leq p^m} \mathscr{O}_{\mathscr{Y}} \underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$. Il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{M} & \hookrightarrow & j_*\mathscr{O}_{\mathscr{U}'} \otimes \mathscr{M} \\
\downarrow \lambda_m & & \downarrow 1 \otimes \lambda_m \\
\mathscr{N} & \hookrightarrow & j_*\mathscr{O}_{\mathscr{U}'} \otimes \mathscr{N}.
\end{array}$$

La flèche à droite est la flèche induite par λ_m sur l'ouvert $\mathscr{U}'$, qui est un isomorphisme car la restriction de f à $\mathscr{U}'$ est simplement une immersion ouverte. Finalement $1 \otimes \lambda_m$ est un isomorphisme. Cela signifie que $\det \lambda_m \in \mathscr{O}_{\mathscr{Y}}$ et que $(\det \lambda_m)^{-1} \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}'}$. On peut donc appliquer le lemme 1.6.3 et on en déduit que $p(\det \lambda_m)^{-1} \in \Gamma(\mathscr{Y}, \hat{\mathscr{B}}^{(m')}_{\mathscr{Y}})$ pour un certain $m' \geq m$. En d'autres termes, si $j \leq m$, $p \cdot \lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}) \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}(\mathscr{Y}) \otimes \mathscr{D}^{(m)}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{Y})$. De plus, en restriction à $\mathscr{U}'$, λ_m est un isomorphisme d'anneaux et on a la relation :

$$\lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}) = \lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}})\lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}).$$

Les opérateurs $\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ sont produit d'au plus $[|\underline{k}|/p^m] + N$ opérateurs d'ordre $\leq p^m$ (où $[x]$ est la partie entière d'un réel x), de sorte que l'on trouve finalement que pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$,

$$p^{[|\underline{k}|/p^m]+N}\lambda_m^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}) \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}(\mathscr{Y}) \otimes \mathscr{D}^{(m)}(\mathscr{Y}).$$

Soit maintenant $m_0 \in \mathbf{N}$. Appliquons ce qui précède à $m = m_0 + 2$. Cela signifie qu'il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que $\forall \underline{k}$,

$$p^{([|\underline{k}|/p^{m_0+2}]+N)}\lambda_{m_0+2}^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m_0+2)}}) \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}(\mathscr{Y}) \otimes \mathscr{D}^{(m_0+2)}(\mathscr{Y}).$$

De plus, nous avons la relation :

$$\lambda_{m_0+2}^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m_0+2)}}) = \frac{q_{\underline{k}}^{(m_0+2)}!}{q_{\underline{k}}^{(m_0)}!}\,\lambda_{m_0}^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m_0)}}).$$

Or, une majoration de la valuation p-adique de ce coefficient est :

$$v_p\left(\frac{q_{\underline{k}}^{(m_0+2)}!}{q_{\underline{k}}^{(m_0)}!}\right) \leq \frac{|\underline{k}|}{p^{m_0+2}(p-1)} - \frac{|\underline{k}|}{p^{m_0}(p-1)} + N\log_p(|\underline{k}|+1)) + \frac{Np}{p-1}.$$

D'où finalement les majorations :

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{q_{\underline{k}}^{(m_0+2)}!}{q_{\underline{k}}^{(m_0)}!}p^{([|\underline{k}|/p^{m_0+2}]+N)}\right) &\leq \frac{|\underline{k}|}{p^{m_0+2}} + \frac{|\underline{k}|}{p^{m_0+2}(p-1)} - \frac{|\underline{k}|}{p^{m_0}(p-1)} + N\log_p(|\underline{k}|+1) \\ &\quad + \frac{N(2p-1)}{p-1} \\ &\leq -\frac{|\underline{k}|}{p^{m_0+1}} + N\log_p(|\underline{k}|+1) + \frac{N(2p-1)}{p-1}. \end{aligned}$$

Pour tous $\underline{k}$, cette quantité est majorée par un certain $c \geq 0$. Cela montre que, pour tout $\underline{k}$,

$$p^c\lambda_{m_0}^{-1}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m_0)}}) \in \hat{\mathscr{B}}^{(m')}\mathscr{Y} \otimes \mathscr{D}^{(m')}(\mathscr{Y}).$$

Posons maintenant $\mu_{m_0} = p^c\lambda_{m_0}^{-1}$ et $\rho_{m_0,m'}$ l'injection canonique de $\hat{\mathscr{D}}^{(m_0)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ dans $\hat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Alors, μ_{m_0} induit une application entre les faisceaux : $\hat{\mathscr{B}}^{(m_0)}_{\mathscr{Y}} \otimes f^{-1}\mathscr{D}^{(m_0)}_{\mathscr{X}} \to \hat{\mathscr{B}}^{(m')}_{\mathscr{Y}} \otimes \mathscr{D}^{(m')}_{\mathscr{Y}}$. Par passage aux complétés et après tensorisation par K, on en déduit une application $\nu_{m_0} = p^{-c}\hat{\mu}_{m_0} \colon \hat{\mathscr{D}}^{(m_0)}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty) \to \hat{\mathscr{B}}^{(m')}_{\mathscr{Y}}\hat{\otimes}\hat{\mathscr{D}}^{(m')}_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}$. Par construction, on a la propriété que $\lambda_{m'} \circ \nu_{m_0} = \rho_{m_0,m'}$. Par passage à la limite sur m_0 de toutes ces aplications ν_{m_0}, on trouve une application $\nu : \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}) \to \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$, qui est une section de λ, si bien que λ est surjectif.

1.6.4.1 Corollaire. *Avec les hypothèses du début de la sous-section, soit $\mathscr{M} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T}))$. Alors $f^!\mathscr{M} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}))$.*

Démonstration. Par dévissage, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est réduit à un seul module $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$-cohérent, toujours noté $\mathscr{M}$. L'assertion est locale sur la base, si bien que l'on peut supposer que $\mathscr{X}$ est affine et que $\mathscr{M}$ admet une résolution $(L_\bullet)$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{T})$-modules libres. Le complexe $f^!\mathscr{M}$ est donc calculé par le complexe : $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\to\mathscr{X}}({}^\dagger\mathscr{Z}) \otimes L_\bullet$ qui est à termes $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z})$-cohérents d'après le lemme 1.6.4. On en déduit que $f^!\mathscr{M} \in D^-_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathscr{Z}))$ et la proposition.

1.6.5 A partir de maintenant dans tout le reste de cette sous-section, on considère le cas où $f^{-1}(\mathscr{U}) \simeq \mathscr{U}'$ et où f induit un isomorphisme : $\mathscr{U}' \to \mathscr{U}$. Dans la suite, on identifie $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$. De l'isomorphisme λ donné dans le 1.6.4, on déduit qu'il existe un morphisme de faisceaux canonique μ : $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$, induit par l'application :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) & \to & \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \\ P & \mapsto & 1\otimes P \end{array}$$

Il est clair sur $\mathcal{U}$ que μ est un homomorphisme d'anneaux, si bien que c'est vrai sur tout $\mathcal{Y}$. Via cet homomorphisme, tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-module à droite ou à gauche peut être considéré comme un $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-module à droite ou à gauche. L'isomorphisme λ est alors un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \times f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-bimodules puisque c'est vrai en restriction à $\mathcal{U}$.

1.6.5.1 Lemme. *Il existe un isomorphisme canonique de $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-bimodules*

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}} \simeq \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}}.$$

Démonstration. Précisons que l'on munit $\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}$ de la structure de $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-module qui provient de la structure tordue de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-module à gauche. Il existe un morphisme canonique : $\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \to \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}}$, qui est un isomorphisme sur $\mathcal{U}$ et qui est donc un isomorphisme sur tout $\mathcal{Y}$. Cet isomorphisme s'étend par linéarité pour donner un isomorphisme $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}$-linéaire :

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}} \to \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}}.$$

Comme le produit tensoriel sur $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}$ est pris pour la structure naturelle de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-module, cette flèche est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-linéaire à droite entre ces deux modules cohérents. De plus, on dispose d'injections bi-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-linéaires :

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}} \hookrightarrow j_*j^*(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}})$$

et

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}} \hookrightarrow j_*j^*(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}}).$$

Il suffit donc de vérifier la $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-linéarité à gauche en restriction à $\mathcal{U}$, ce qui est clair.

1.6.5.2 Proposition. *Avec les hypothèses du début de la section, supposons de plus que f soit propre. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des modules respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-cohérents. Alors les faisceaux $\mathcal{H}^n f^!\mathcal{N}$ et $\mathcal{H}^n f_+\mathcal{M}$ sont nuls pour $n \neq 0$, les faisceaux $\mathcal{H}^0 f^!\mathcal{N}$ et $\mathcal{H}^0 f_+\mathcal{M}$ sont cohérents, et il existe des isomorphismes canoniques*

$$f_+\mathcal{M} \simeq f_*\mathcal{M} \quad \text{et} \quad f^!\mathcal{N} \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})} f^{-1}\mathcal{N}.$$

Démonstration. Tout d'abord, il résulte de [7] que f_+ préserve la cohérence. D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} f_+\mathcal{M} &= Rf_*\left(\left(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}} f^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{X}}\right) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})} \mathcal{M}\right) \\ &\simeq Rf_*\left(\left(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}}\right) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})} \mathcal{M}\right) \end{aligned}$$

Or le passage à l'adjoint induit un isomorphisme canonique de bi-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules entre $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$ et $\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}} \tilde{\omega}^{-1}_{\mathcal{Y}}$, si bien que $f_+\mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{M})$ qui est isomorphe à $Rf_*(\mathcal{M})$. Mais si $i \geq 1$, les modules $R^i f_*\mathcal{M}$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents dont la restriction à $\mathcal{U}$ est nulle, si bien qu'ils sont nuls sur tout $\mathcal{Y}$.

Pour ce qui est de l'image inverse, elle est cohérente d'après le corollaire 1.6.4.1 et les modules $\mathcal{T}or^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}}({}^\dagger\mathcal{Z}), \mathcal{N})$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents qui sont nuls sur $\mathcal{U}$ et qui sont donc nuls. La formule résulte alors du fait que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules à gauche $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}) \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$.

1.6.5.3 Théorème. *Avec les hypothèse de la proposition précédente, $f^!$ et f_+ induisent une équivalence de catégories entre $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ et $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$.*

Commençons par remarquer que le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$ est de dimension cohomologique finie. Pour cela, il suffit de montrer que tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-module cohérent $\mathcal{M}$ admet localement une résolution finie par des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules libres de type fini. Localement le module $\mathcal{M}$ admet une telle résolution infinie. La restriction à $\mathcal{U}$ de cette résolution est une résolution localement libre de rang fini du $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}_{|\mathcal{U}}$. En restriction à $\mathcal{U}$, cette résolution est donc finie puisque $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}$ est de dimension cohomologique finie. Il découle alors de 4.3.12 de [6] que la résolution de départ est en fait finie.

En particulier, la catégorie $D^b_{parf}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ coïncide avec la catégorie $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ (de même pour $D^b_{parf}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$). On peut donc appliquer le théorème de dualité relative (cf 5.7.2 de[19]) et son corollaire qui est la formule d'adjonction 9.12 de [9], pour voir qu'il existe des homomorphismes canoniques dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ et dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$:

$$\mathcal{M} \to f^! f_+ \mathcal{M} \quad \text{et} \quad f_+ f^! \mathcal{N} \to \mathcal{N}.$$

Pour montrer que ce sont des isomorphismes on peut alors supposer que $\mathcal{M}$ et que $\mathcal{N}$ sont cohérents et placés en degré zéro. Il résulte alors de la proposition que les modules

$f^! f_+ \mathcal{M}$ et $f_+ f^! \mathcal{N}$ sont cohérents et placés en degré zéro. D'autre part, il est évident que sur l'ouvert $\mathcal{U}$ ces morphismes sont des isomorphismes. La conclusion provient donc encore une fois de 4.3.12 de [6].

Remarque. Notons que cette équivalence de catégories coïncide bien, pour les images directes par spécialisation d'isocristaux surconvergents, avec l'équivalence de catégories décrite en 2.3.5 de [5]. En effet, notons f_K le morphisme induit par f au niveau des fibres génériques : $\mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{X}_K$. Alors d'après 2.3.5, si E est un isocristal sur X surconvergent le long de T, il lui correspond $f_K^* E$, sur $\mathcal{Y}_K$. Or , d'après 1.5.4, $sp_* f_K^* E$ est isomorphe à $f^! sp_* E$. D'où la remarque.

Chapitre 2

Théorèmes d'acyclicité pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques sur l'espace projectif.

Introduction

Soient V un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques $(0,p)$, $\mathcal{V}$ le complété p-adique de V, S le schéma Spec$V$ et $\mathscr{S}$ le schéma formel Spf$\mathcal{V}$. On note X, l'espace projectif de dimension N sur V, $X_i = X \times \mathrm{Spec}(V/p^{i+1})$, et $\mathscr{X}$ l'espace projectif formel de dimension N sur Spf$\mathcal{V}$. On désignera par $\mathscr{O}_X(r)$ le twist de Serre sur X. On peut construire les faisceaux d'opérateurs différentiels introduits par Berthelot dans [6] $\mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$ sur X_i, $\mathscr{D}^{(m)}_X$ sur X, $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}} = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_{X_i}$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$ sur $\mathscr{X}$, (l'indice $\mathbf{Q}$ signifiant que ces faisceaux sont tensorisés par K). On rappelle que d'après [6], ces faisceaux d'anneaux sont tous cohérents. Considérons en outre les faisceaux d'opérateurs différentiels usuels sur X_K, la fibre générique de X, et sur X_0, que nous noterons respectivement $\mathscr{D}_{X,\mathbf{Q}}$ et $\mathscr{D}_{X_0}$. D'après un résultat de Beilinson-Bernstein (cf [1] ou p. 104 de [2]) et en utilisant qu'il existe assez d'injectifs quasi-cohérents, les $\mathscr{D}_{X,\mathbf{Q}}$-modules sont acycliques pour le foncteur sections globales sur X. D'autre part, il est aussi connu que les $\mathscr{D}_{X_0}$-modules sont acycliques (cf [11]). On donne ici une démonstration du fait que les $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$- modules cohérents et les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents sont acycliques sur $\mathscr{X}$.

Notre argument repose sur une analyse de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\bullet}\mathscr{D}^{(m)}_X$. En effet, si X est un S-schéma lisse sur un corps K de caractéristique 0, l'algèbre graduée de $\mathscr{D}_X$, le faisceau des opérateurs différentiels usuels, s'identifie à l'algèbre symétrique de l'espace tangent de X, noté $\mathscr{T}_X$. De plus, il découle de ([8] A.10), que, sans hypothèse de caractéristique, l'algèbre $\mathrm{gr}_{\bullet}\mathscr{D}^{(0)}_X$ s'identifie aussi à l'algèbre symétrique de l'espace tangent de X. Dans la première partie de cet article, on généralise ce résultat. En effet, si A est une V-algèbre et M un A-module, nous commençons par donner une généralisation à un niveau m de l'algèbre à puissances divisées universelle $\Gamma_A(M)$. On vérifie que l'on peut faisceautiser la construction et on définit ensuite par dualité ce que nous appellerons *l'algèbre symétrique de niveau* m d'un $\mathcal{O}_X$-module. Nous vérifions enfin que si X est un S-schéma lisse, l'algèbre symétrique de niveau m de l'espace tangent est canoniquement isomorphe à l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}_X^{(m)}$. Il s'agit, dans la deuxième partie, d'en tirer les conséquences cohomologiques pour les modules sur le faisceau des opérateurs différentiels algébriques : on commence par montrer que si r est assez grand, l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}_X^{(m)}(r)$ est acyclique et on en déduit facilement que si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module cohérent, le module $\mathscr{E}(r)$ est acyclique pour r assez grand. En vue d'un théorème d'acyclicité, nous sommes conduits à étudier la cohomologie des modules du type $\mathscr{D}_X^{(m)} \otimes \mathcal{O}_X(r)$, pour $r \in \mathbf{Z}$, ce qui se fait via le gradué. En remarquant que la surjection $\mathcal{O}_X(1)^{N+1} \to \mathscr{T}_X$ fait de $\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{T}_X)$ une $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$-algèbre finie, on montre le point clé, qui est que, si r est fixé dans $\mathbf{Z}$, et si k est assez grand, le module $\mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X^{(m)}(r))$ est acyclique. La troisième partie concerne les $\hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$-modules et les $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}^\dagger$-modules : pour les $\hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$-modules, nous adaptons les résultats de la partie précédente par des arguments de passage à la limite projective. Le passage à la limite inductive sur m pour l'étude des $\mathscr{D}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}^\dagger$-modules cohérents ne pose alors aucune difficulté. Nous terminons dans la quatrième partie par des propriétés de finitude des sections globales des $\mathscr{D}_X^{(m)}$-modules cohérents et des $\hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$-modules cohérents.

Enfin, un tel théoréme d'acyclicité est tout à fait crucial si l'on veut définir la transformation de Fourier des modules cohérents sur l'anneau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes à l'infini sur $\mathscr{X}$, construits par Berthelot dans ([6] 4.2). Nous renvoyons au chapitre 4 pour la construction de cette transformation de Fourier, dont l'idée revient à Berthelot. Rappelons brièvement la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels : notons $[x_0, \ldots, x_N]$ les coordonnées projectives sur X, $U_i = D_+(x_i)$, T et $\mathscr{T}$ les diviseurs $V(x_0)$ sur X et $\mathscr{X}$ respectivement, et introduisons les faisceaux $\mathscr{B}_X^{(m)}$, définis sur U_i par $\mathscr{B}_X^{(m)} = \mathcal{O}_{U_i}[T]/\left((x_0/x_i)^{p^{m+1}}T - p\right)$. Alors d'après ([6] 2.3.3) le faisceau $\mathscr{B}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ est muni d'une structure d'anneau. Soient $\hat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \hat{\otimes} \hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X}}^{(m)}$ son complété p-adique et $\mathscr{D}^\dagger({}^\dagger\mathscr{T})_\mathbf{Q} = \varinjlim_m \hat{\mathscr{B}}_{\mathscr{X}}^{(m)} \hat{\otimes} \hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ le faisceau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes à l'infini. Ces faisceaux sont cohérents d'après ([6] 3.1.2). Ceci nous amène à traiter le problème dans le cadre plus général des modules cohérents sur des faisceaux d'opérateurs différentiels munis de coefficients vérifiant certaines conditions données au début de la deuxième partie. On montre en fait un théorème d'acyclicité dans ce contexte. Les résultats donnés en appendice par Berthelot montrent alors que les coefficients $\mathscr{B}_X^{(m)}$ définis ci-dessus vérifient ces conditions, de sorte que la cohomologie des $\mathscr{D}^\dagger({}^\dagger\mathscr{T})_\mathbf{Q}$-modules cohérents est triviale sur $\mathcal{X}$.

2.1 Construction et propriétés des algèbres $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E})$ et $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$

Dans cette partie, l'entier m est fixé. Pour les m-PD-structures intervenant dans les constructions, nous nous référerons à ([6], chapitre 1), dont nous adopterons l'essentiel des notations. Rappelons en particulier :

(i) Si $k \in \mathbf{N}$, q_k désigne le quotient de la division de k par p^m.

(ii) Si $k, k' \in \mathbf{N}$ et si $k'' = k - k'$, $\left\{ {k \atop k'} \right\} := q_k!/q_{k'}!q_{k''}!$.

(iii) Si $k, k' \in \mathbf{N}$, $\left\langle {k \atop k'} \right\rangle := \binom{k}{k'} \left\{ {k \atop k'} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)}$.

Enfin, si (A, I, J, γ) est une V-algèbre munie d'un m-PD-idéal, les opérations de puissances divisées sur les éléments de I seront notées $x \mapsto x^{\{k\}}$ (alors $x^k = q_k!x^{\{k\}}$).

2.1.1 Construction locale. Soient A une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre, E un A-module projectif de type fini, et $\mathbf{S}(E)$ l'algèbre symétrique de E relativement à A ; c'est une algèbre graduée : $\mathbf{S}(E) = \oplus \mathbf{S}_n(E)$. Soient $\mathbf{I}(E) = \oplus_{n \geq 1} \mathbf{S}_n(E)$, l'idéal d'augmentation de $\mathbf{S}(E)$ et $P_{\mathbf{S}(E)}(\mathbf{I}(E))$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $(\mathbf{S}(E), \mathbf{I}(E))$. On désigne par $\bar{\mathbf{I}}$ le m-PD-idéal de cette nouvelle algèbre.

Définitions. On pose

$$\Gamma_{A,(m)}(E) := P_{\mathbf{S}(E)}(\mathbf{I}(E)),$$
$$\Gamma^n_{A,(m)}(E) := \Gamma_{A,(m)}(E)/\bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas lieu de spécifier la base, on omettra le A en indice. On notera d'autre part λ le morphisme composé $E \to \mathbf{I}(E) \to \Gamma_{A,(m)}(E)$.

2.1.1.1 Proposition. *Soient E un A-module projectif de type fini, B une A-algèbre munie d'un m-PD-idéal (I, J, γ) et φ un morphisme A-linéaire $E \to I$, alors il existe un unique morphisme de A-algèbres $\psi : \Gamma_{A,(m)}(E) \to B$, tel que $\varphi = \psi \circ \lambda$.*

La démonstration est formelle à partir de la propriété universelle des algèbres symétriques et de celle des m-PD-enveloppes (cf 1.4.1 de [6]).

2.1.1.2 Rappels. Soit E un A-module libre de base $(x_1, \cdots, x_t)$, alors :

(i) Un morphisme d'algèbres $A \to B$ induit un isomorphisme canonique de B-algèbres:
$$B \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \simeq \Gamma_{B,(m)}(B \otimes_A E).$$

(ii) Le A-module $\Gamma_{A,(m)}(E)$ est libre de base $x_1^{\{k_1\}}\cdots x_t^{\{k_t\}}$.

(iii) Le A-module $\Gamma^n_{A,(m)}(E)$ est libre de base $x_1^{\{k_1\}}\cdots x_t^{\{k_t\}}$ avec $\sum k_i \leq n$.

En effet, si E est libre, $\mathbf{S}(E)$ est un anneau de polynômes à t variables et on peut appliquer la proposition 1.5.1 de [6] sur les m-PD-enveloppes. Il résulte aussi de cette proposition que la m-PD-structure sur $\bar{\mathbf{I}}$ est compatible à toute m-PD-structure sur A.

2.1.1.3 Lemme. *Soient $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres et E un A-mo-dule projectif de type fini, alors on a un isomorphisme canonique de B-algèbres : $B\otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \simeq \Gamma_{B,(m)}(B\otimes_A E)$.*

Le même énoncé vaut pour les modules $\Gamma^n_{B,(m)}(B\otimes_A E)$ et $B\otimes_A \Gamma^n_{A,(m)}(E)$.

Démonstration. Soit $F = B\otimes_A E$, c'est un B-module projectif de type fini. On a un isomorphisme canonique : $B\otimes_A \mathbf{S}(E) \simeq \mathbf{S}(F)$. Par fonctorialité des m-PD-enveloppes, on en déduit un homomorphisme canonique $\lambda : B\otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \to \Gamma_{B,(m)}(F)$. D'après ([6] prop 1.4.6), la formation des m-PD-enveloppes commute aux changements de base plats, si bien que λ est un isomorphisme dans le cas où B est une A-algèbre plate.

En général, vérifier que λ est un isomorphisme est une question locale : soient $\mathcal{Q}$ un idéal premier de B et $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\mathcal{Q})$. Le morphisme φ induit un morphisme entre les anneaux localisés $A_{\mathcal{P}} \to B_{\mathcal{Q}}$. Notons $E_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}}\otimes_A E$ et $F_{\mathcal{P}} = B_{\mathcal{Q}}\otimes_B F$. Comme E et F sont des modules projectifs de type fini, $E_{\mathcal{P}}$ et $F_{\mathcal{Q}}$ sont des modules libres. Soient λ' le morphisme $B_{\mathcal{Q}}\otimes_A \Gamma_{A_{\mathcal{P}},(m)}(E_{\mathcal{P}}) \to \Gamma_{B_{\mathcal{Q}},(m)}(F_{\mathcal{Q}})$ et α et β les flèches de localisation (qui sont des isomorphismes) :

$\alpha : A_{\mathcal{P}}\otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \to \Gamma_{A_{\mathcal{P}},(m)}(E_{\mathcal{P}})$,

$\beta : B_{\mathcal{Q}}\otimes_B \Gamma_{B,(m)}(F) \to \Gamma_{B_{\mathcal{Q}},(m)}(F_{\mathcal{Q}})$.

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
B_{\mathcal{Q}}\otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) & \xrightarrow{1\otimes\lambda} & B_{\mathcal{Q}}\otimes_B \Gamma_{B,(m)}(F) \\
\downarrow 1\otimes\alpha & & \downarrow\beta \\
B_{\mathcal{Q}}\otimes_{A_{\mathcal{P}}} \Gamma_{A_{\mathcal{P}},(m)}(E_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\lambda'} & \Gamma_{B_{\mathcal{Q}},(m)}(F_{\mathcal{Q}}).
\end{array}$$

D'après 2.1.1.2, λ' est un isomorphisme, ce qui montre que $1\otimes\lambda$ est un isomorphisme.

2.1.1.4 Lemme. *Soient E et E' deux A-modules projectifs de type fini, alors on a un isomorphisme canonique de A-algèbres graduées:*

$$\Gamma_{(m)}(E)\otimes_A \Gamma_{(m)}(E') \simeq \Gamma_{(m)}(E\oplus E').$$

Démonstration. Par fonctorialité, on a des homomorphismes canoniques : $\Gamma_{(m)}(E) \xrightarrow{\lambda} \Gamma_{(m)}(E \oplus E')$ et $\Gamma_{(m)}(E') \xrightarrow{\mu} \Gamma_{(m)}(E \oplus E')$. On en déduit un homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E') & \to & \Gamma_{(m)}(E \oplus E'), \\ x \otimes y & \mapsto & \lambda(x).\mu(y). \end{array}$$

Voir que c'est un isomorphisme est une question locale : on peut donc supposer que A est local et que E et E' sont libres sur A. L'assertion résulte alors de la description donnée en 2.1.1.2.

2.1.1.5 Proposition. *Soit E un A-module projectif de type fini. Alors :*

(i) L'algèbre $\Gamma_{(m)}(E)$ est une A-algèbre graduée : $\Gamma_{(m)}(E) = \oplus_{n \in \mathbf{N}} \Gamma_{(m),n}(E)$.

(ii) L'algèbre $\Gamma^n_{(m)}(E)$ est un quotient gradué de $\Gamma_{(m)}(E)$.

(iii) Il existe un isomorphisme canonique $\mu : \bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}} \to \Gamma_{(m),n}(E)$.

Démonstration. Montrons d'abord (i). Pour se donner une $\mathbf{Z}$-graduation sur $\Gamma_{(m)}(E)$, il suffit de se donner une action du schéma en groupes $\mathbf{G}_{m,A}$ sur $\Gamma_{(m)}(E)$, c'est-à-dire, pour toute A-algèbre B, une action du groupe B^* des éléments inversibles de B sur $B \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$ et ce, fonctoriellement en B. Soit B une A-algèbre et $\lambda \in B^*$; la multiplication par λ induit une application $\alpha_\lambda : B \otimes_A E \to B \otimes_A E$ et par fonctorialité, une application $\varphi_\lambda : \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E) \to \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E)$. Considérons maintenant un morphisme de A-algèbres $u : B \to C$. L'élément $u(\lambda)$ induit β_λ sur $C \otimes_A E$ et ψ_λ sur $\Gamma_{(m)}(C \otimes_A E)$. Par construction $\beta_\lambda = 1 \otimes \alpha_\lambda$ si on identifie $C \otimes_A E$ à $C \otimes_B B \otimes_A E$. Donc d'après le lemme 2.1.1.3, ψ_λ coïncide avec $1 \otimes \varphi_\lambda$ si on identifie $\Gamma_{(m)}(C \otimes_A E)$ à $C \otimes_B \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E)$, ce qui montre que l'action construite est bien fonctorielle.
Montrons maintenant (ii) et (iii) : le module $\Gamma_{(m),n}(E)$ s'identifie à

$$\{x \in \Gamma_{(m)}(E) \ : \ \forall B, \forall \lambda \in B^*, \ \psi_\lambda(1 \otimes x) = \lambda^n.(1 \otimes x)\}.$$

En reprenant la définition de la filtration $\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}$ donnée en 1.3.7 de [6], on voit que $\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}$ est engendré par des éléments homogènes de degré $\geq n$. Il est donc homogène et l'algèbre $\Gamma^n_{(m)}(E)$ est graduée. De plus, $\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}$ est inclus dans $\oplus_{k \geq n} \Gamma_{(m),k}(E)$ et on dispose d'une application naturelle

$$\mu : \bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}} \to \Gamma_{(m),n}(E).$$

Pour vérifier que μ est un isomorphisme, on peut supposer que A est local et que E est libre de base $(x_1, \cdots, x_t)$; alors

$$\psi_\lambda(x_1^{\{k_1\}} \cdots x_t^{\{k_t\}}) = \lambda^{|\underline{k}|} x_1^{\{k_1\}} \cdots x_t^{\{k_t\}}.$$

Cela montre que $\Gamma_{(m),n}(E)$ s'identifie au A-module libre de base $x_1^{\{k_1\}} \cdots x_t^{\{k_t\}}$ avec $\sum k_i = n$ et que μ préserve ces éléments. C'est donc bien un isomorphisme.

Remarque. Les isomorphismes des lemmes précédents sont en fait des isomorphismes d'algèbres graduées.

2.1.1.6 Proposition. *L'algèbre $\Gamma_{(m)}(E)$ est munie d'une structure de bigèbre augmentée commutative, c'est-à-dire que l'on dispose d'homomorphismes de A-algèbres vérifiant les propriétés usuelles des algèbres de groupe :*

(i) $\Delta \colon \Gamma_{(m)}(E) \to \Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$ *où Δ est co-commutative et co-associative,*

(ii) $\varepsilon \colon \Gamma_{(m)}(E) \to A$.

Démonstration. Soit δ l'application diagonale : $E \to E \oplus E$. Par fonctorialité, δ induit un homomorphisme de A-algèbres Δ : $\Gamma_{(m)}(E) \to \Gamma_{(m)}(E \oplus E)$. D'après le lemme 2.1.1.4, cette dernière algèbre est isomorphe à $\Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$, si bien que Δ définit une application à valeurs dans $\Gamma_{(m)}(E) \otimes \Gamma_{(m)}(E)$.

L'algèbre $\Gamma_{(m)}(E)$ étant graduée, on dispose de ε : $\Gamma_{(m)}(E) \to A$ qui à un élément fait correspondre sa composante homogène de degré zéro. Le fait que Δ et ε sont des morphismes définissant une structure de bigèbre, provient par fonctorialité des propriétés de δ. Par exemple, si l'on considère l'involution σ de $E \oplus E$ qui à $x \oplus y$ associe $y \oplus x$, $\sigma \circ \delta = \delta$ et ceci implique que Δ est co-commutative.

2.1.2 Faisceautisation de la construction. Soit X un $\mathbf{Z}_{(p)}$-schéma. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de type fini sur X, on note $\Gamma_{(m)}(\mathscr{E})$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \Gamma_{\mathscr{O}(U),(m)}(\mathscr{E}(U))$. Soient U et V deux ouverts affines tels que $V \subset U$; d'après la proposition 2.1.1.3, on a un isomorphisme canonique :

$$\Gamma_{\mathscr{O}(V),(m)}(\mathscr{E}(V)) \simeq \mathscr{O}(V) \otimes_{\mathscr{O}(U)} \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}(U)).$$

Comme $\mathscr{O}(V)$ est plat sur $\mathscr{O}(U)$, on en déduit que, pour tout ouvert affine V inclus dans U, $\Gamma_{(m)}(\mathscr{E})(V) = \Gamma_{\mathscr{O}(V),(m)}(\mathscr{E}(V))$. En particulier, $\Gamma_{(m)}(\mathscr{E})$ est un faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres graduées, localement libres, dont la structure locale est donnée en 2.1.1.2.

On construit de même les faisceaux $\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E})$ qui sont des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres dont la structure locale est aussi donnée en 2.1.1.2. Si l'on souhaite spécifier l'espace sur lequel on travaille, on le notera en indice.

On déduit facilement de ce qui précède les propositions qui suivent.

2.1.2.1 Proposition. *Si $f : Y \to X$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$-schémas et si $\mathscr{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique de m-PD-algèbres graduées : $\Gamma_{Y,(m)}(f^*\mathscr{E}) \simeq f^*\left(\Gamma_{X,(m)}(\mathscr{E})\right)$.*

L'énoncé analogue vaut pour $\Gamma^n_{Y,(m)}(f^*\mathscr{E})$ et $f^*\left(\Gamma^n_{X,(m)}(\mathscr{E})\right)$.

2.1.2.2 Proposition. *Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de type fini, on a un isomorphisme canonique de m-PD-algèbres graduées :*

$$\Gamma_{(m)}(\mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}') \simeq \Gamma_{(m)}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}').$$

2.1.3 Construction et propriétés de l'algèbre $S^{(m)}(\mathscr{E})$. Dans cette partie on reprend les hypothèses de 2.1.2. On commence par définir l'algèbre $S^{(m)}(\mathscr{E})$ par dualité à partir de $\Gamma_{(m)}(\mathscr{E})$.

Définition. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. On pose :

$$S^{(m)}(\mathscr{E}) = \bigcup_n \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee), \mathcal{O}_X).$$

On dira que $S^{(m)}(\mathscr{E})$ est *l'algèbre symétrique de niveau m* du faisceau $\mathscr{E}$. Si cela s'avère nécessaire, on indiquera en indice l'espace sur lequel on travaille.

Remarque. Les faisceaux $S^{(m)}(\mathscr{E})$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres. En outre, il résulte de ([Be-Og] A.10) que $S^{(0)}(\mathscr{E})$ est l'algèbre symétrique de $\mathscr{E}$, ce qui justifie la terminologie.

2.1.3.1 Proposition. *Le faisceau $S^{(m)}(\mathscr{E})$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres commutatives.*

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee), \mathcal{O}_X)$. Par dualité, $\mathscr{B}$ est munie d'une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée commutative qui provient de la structure de bigèbre commutative de $\Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee)$ décrite en 2.1.1.6. Si u et v sont des sections de $\mathscr{B}$, rappelons que le produit $u.v$ est défini comme le composé :

$$\Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{\Delta} \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{1\otimes v} \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X.$$

D'autre part, on a une suite exacte de faisceaux localement libres sur X :

$$0 \to \bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}} \to \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \to \Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \to 0.$$

On en tire une inclusion : $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee), \mathscr{O}_X) \to \mathscr{B}$, et, par passage à la limite inductive, on voit que $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$ est un sous-faisceau de $\mathscr{B}$ via une application notée i.

On vérifie facilement localement que

$$\Delta\left(\bar{\mathrm{I}}^{\{n+n'\}}\right) \subset \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \otimes \bar{\mathrm{I}}^{\{n'+1\}} + \bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}} \otimes \Gamma_{(m)}(\mathscr{E}^\vee),$$

si bien que Δ induit une application :

$$\Delta_{n,n'} : \Gamma^{n+n'}_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \to \Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \otimes \Gamma^{n'}_{(m)}(\mathscr{E}^\vee).$$

Si (u, v) est dans $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee), \mathscr{O}_X) \times \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Gamma^{n'}_{(m)}(\mathscr{E}^\vee), \mathscr{O}_X)$, on peut donc définir le produit $u.v$ comme le composé :

$$\Gamma^{n+n'}_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{\Delta_{n,n'}} \Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \otimes_{\mathscr{O}_X} \Gamma^{n'}_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{1\otimes v} \Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}^\vee) \xrightarrow{u} \mathscr{O}_X.$$

Comme $\Delta_{n,n'}$ est induit par Δ, ceci montre que l'inclusion i préserve le produit ; en particulier, le produit défini sur $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$ est associatif et commutatif et munit $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$ d'une structure d'algèbre commutative.

Par dualité, on déduit immédiatement de la proposition 2.1.2.1 l'énoncé qui suit.

2.1.3.2 Proposition. *Si f est un homomorphisme de $\mathbf{Z}_{(p)}$-schémas : $Y \to X$, on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-algèbres : $f^*(\mathrm{S}^{(m)}_X(\mathscr{E})) \simeq \mathrm{S}^{(m)}_Y(f^*\mathscr{E})$.*

2.1.3.3 Proposition.

(i) L'algèbre $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$ est une algèbre graduée : $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E}) = \oplus_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{S}^{(m)}_n(\mathscr{E})$.

(ii) On dispose d'un isomorphisme canonique $\mathrm{S}^{(m)}_n(\mathscr{E}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}}, \mathscr{O}_X)$.

Démonstration. D'après 2.1.1.5, l'algèbre $\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E})$ est graduée par $\oplus_{k=0}^n \Gamma_{(m),k}(\mathscr{E})$ et on a un isomorphisme canonique : $\bar{\mathrm{I}}^{\{k\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{k+1\}} \simeq \Gamma_{(m),k}(\mathscr{E})$. En dualisant, cette graduation définit une graduation sur $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}), \mathscr{O}_X)$.

De plus, il existe une suite exacte :

$$0 \to \bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}} \to \Gamma^n_{(m)}(\mathscr{E}) \to \Gamma^{n-1}_{(m)}(\mathscr{E}) \to 0$$

D'où en dualisant, une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^{n-1}_{(m)}(\mathscr{E}), \mathcal{O}_X) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^{n}_{(m)}(\mathscr{E}), \mathcal{O}_X) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X) \to 0$$

Les graduations duales définies sur les faisceaux $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^{n}_{(m)}(\mathscr{E}), \mathcal{O}_X)$ sont donc compatibles pour n variable et induisent une graduation sur $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$, dont le gradué est isomorphe à $\oplus_{n\in\mathbf{N}}\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bar{\mathrm{I}}^{\{n\}}/\bar{\mathrm{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X)$, et tel que $\mathrm{gr}_k\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E}) \simeq \mathrm{gr}_k(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^{k}_{(m)}(\mathscr{E}), \mathcal{O}_X))$. De ce fait, la graduation ainsi définie est une graduation d'algèbre.

2.1.3.4 Structure locale.

Supposons maintenant que X soit affine et que $X = \mathrm{Spec}A$ où A est une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang fini ; $\mathscr{E}$ provient d'un A-module libre E, de base $(x_1, \cdots, x_t)$. Notons $E^\vee$ le dual de E et $(y_1, \cdots, y_t)$ la base duale de $(x_1, \cdots, x_t)$. D'après 2.1.1.2, les modules $\Gamma^{n}_{(m)}(E^\vee)$ sont libres de base $y_1^{\{k_1\}}.\cdots.y_t^{\{k_t\}}$ avec $\sum k_i \leq n$. Soit $\underline{x}^{\langle \underline{k}\rangle} = \underline{x}^{\langle k_1,\cdots,k_t\rangle}$ la base duale des $\underline{y}^{\{\underline{k}\}}$ de $\Gamma^{n}_{(m)}(E^\vee)$. Pour n variable, ces éléments forment une base de $\mathrm{S}^{(m)}(E)$ comme A-module.

2.1.3.4.1 Lemme. *Pour tous $\underline{k}', \underline{k}''$ dans* $\mathbf{N}$, *on a :*

$$\underline{x}^{\langle \underline{k}'\rangle}.\underline{x}^{\langle \underline{k}''\rangle} = \left\langle {\underline{k}'+\underline{k}'' \atop \underline{k}'} \right\rangle .\underline{x}^{\langle \underline{k}'+\underline{k}''\rangle}.$$

En particulier, on a l'identité : $\underline{x}^{\langle \underline{k}\rangle} = x_1^{\langle k_1\rangle}\cdots x_t^{\langle k_t\rangle}$ et par la suite, on confondra les deux notations.

Démonstration. Dans $E^\vee \oplus E^\vee$, on considérera les éléments $r_i = (y_i, 0)$ et $s_i = (0, y_i)$ qui forment une base. Alors

$$\Delta_{n,n'}\left(y_1^{\{k_1\}}\cdots y_t^{\{k_t\}}\right) = (r_1+s_1)^{\{k_1\}}\cdots(r_t+s_t)^{\{k_t\}}$$

et

$$\left(\underline{x}^{\langle \underline{k}'\rangle}.\underline{x}^{\langle \underline{k}''\rangle}\right).(y_1^{\{k_1\}}\cdots y_t^{\{k_t\}}) = \underline{x}^{\langle \underline{k}'\rangle}\circ(1\otimes \underline{x}^{\langle \underline{k}''\rangle})((r_1+s_1)^{\{k_1\}}\cdots(r_t+s_t)^{\{k_t\}}).$$

Compte tenu de [6], 1.3.6, les seuls termes non nuls de $(1\otimes \underline{x}^{\langle \underline{k}''\rangle})(\Delta_{n,n'}(\underline{y}^{\{\underline{k}\}}))$ sont de la forme $\left\langle {\underline{k} \atop \underline{k}''}\right\rangle.\prod_{i=1}^t r_i^{\{k_i-k_i''\}}$. D'où finalement la formule du lemme.

Par dualité, à partir de 2.1.1.5, on montre facilement la proposition qui suit.

2.1.3.4.2 Proposition. *Le module $\mathrm{S}^{(m)}_n(\mathscr{E})$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de base les $\underline{x}^{\langle \underline{k}\rangle}$ avec $|\underline{k}| = n$.*

Soient $y \in E$ et $F = A.Y$ le A-module libre de rang un de base Y. Il existe un homomorphisme canonique, A-linéaire, de F vers E, qui envoie Y sur y. On en déduit une application $\mu \colon \mathbf{S}^{(m)}(F) \to \mathbf{S}^{(m)}(E)$. Le module $\mathbf{S}^{(m)}(F)$ est libre de base les $Y^{\langle k \rangle}$.

Définition. Nous poserons $y^{\langle k \rangle} = \mu(Y^{\langle k \rangle})$.

Il est évident que cette notation est cohérente avec les notations précédentes pour les éléments d'une base de E.

En utilisant la description locale, on montre comme en 2.1.2.2 la proposition qui suit.

2.1.3.5 Proposition. *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang fini. Alors il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-algèbres graduées :*

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E}) \otimes \mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E}') \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}').$$

2.1.3.6 Proposition. *Soient X un schéma localement noethérien, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini. Alors l'algèbre $\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E})$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre localement noethérienne.*

Démonstration. Comme X est localement noethérien, il suffit de montrer que si U est un ouvert de X sur lequel $\mathscr{E}$ est libre de base $(x_1, \ldots, x_t)$, $\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E})(U)$ est une $\mathscr{O}(U)$-algèbre de type fini. Or, $\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E})(U)$ est engendrée par les $x_i^{\langle k_i \rangle}$. Soit $k \in \mathbf{N}$, écrivons

$$k = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{m-1} p^{m-1} + a_m p^m,$$

avec $0 \leq a_j \leq p-1$ pour tout $j \leq m-1$. Alors, on voit comme en [6], 2.2.5, que

$$x_i^{\langle k \rangle} = u x_i^{a_0} \cdots \left(x_i^{\langle p^{m-1} \rangle}\right)^{a_{m-1}} \left(x_i^{\langle p^m \rangle}\right)^{a_m},$$

où u est une unité p-adique. Cela montre que $\mathbf{S}^{(m)}(\mathscr{E})(U)$ est engendrée par les $x_i^{\langle p^j \rangle}$ pour $1 \leq i \leq t$ et $0 \leq j \leq m$. D'où la proposition.

2.1.3.7 Comparaison entre l'algèbre graduée de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ et l'algèbre symétrique de niveau m de l'espace tangent.

Dans cette partie, X est un S-schéma lisse, $\mathscr{T}_X$ est le faisceau tangent de X relativement à S.

2.1.3.7.1 Lemme. *Soit A une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre munie d'un m-PD-idéal (I, J, γ) et d'une filtration décroissante d'anneau K_n telle que $\gamma_k(K_n \bigcap J) \subset K_{nk} \bigcap J$ pour tous $k, n \in \mathbf{N}$. On considère la filtration induite sur I et J. Alors il existe une unique m-PD-structure sur $\mathrm{gr}_\bullet I$: $(\mathrm{gr}_\bullet I, \mathrm{gr}_\bullet J, \bar{\gamma})$ telle que, si $\bar{x} \in \mathrm{gr}_n J$ est la classe de $x \in K_n \bigcap J$, $\bar{\gamma}_k(\bar{x})$ soit la classe* mod $K_{nk+1} \bigcap J$ *de $\gamma_k(x)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que la condition du lemme implique que $K_n \bigcap J$ est un sous-PD-idéal de J. Notons $I' = \mathrm{gr}_\bullet I$, $J' = \mathrm{gr}_\bullet J$ et J'_n ses composantes homogènes. Il est évident que $I'^{(p^m)} + p.I' \subset J'$. Le seul point à montrer est que la structure définie dans l'énoncé munit J' d'une PD-structure. Soient $x \in K_n \bigcap J$ et $y \in K_{n+1} \bigcap J$, alors

$$\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\gamma_j(y) = \gamma_k(x) \bmod K_{nk+1} \bigcap J,$$

d'après la condition du lemme. Finalement, ceci définit une application :

$$\begin{array}{cccc} \bar{\gamma}_k & : & J'_n & \to & J'_{nk} \\ & & \bar{x} & \mapsto & \gamma_k(x) \bmod K_{nk+1}. \end{array}$$

Soit $x \in J'$, $x = \sum_{i=r}^{s} x_i$ où $x_i \in J'_i$ et $x_i \neq 0$; on prolonge $\bar{\gamma}$ en posant :

$$\bar{\gamma}_k(x) = \sum_{k_r + \cdots + k_s = k} \bar{\gamma}_{k_r}(x_r) \cdots \bar{\gamma}_{k_s}(x_s).$$

Il reste à montrer que les $\bar{\gamma}_k$ vérifient les axiomes des puissances divisées. Par définition, $\bar{\gamma}_0(x) = 1$, $\bar{\gamma}_1(x) = x$ et si $k \geq 1$, $\bar{\gamma}_k(x) \in J'$. D'autre part, du fait que les γ_k sont des puissances divisées sur J, les éléments homogènes de J' satisfont les égalités suivantes :

(i) $\forall x \in J'_i$, $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j$ où $x'_j \in J'_i$, $\bar{\gamma}_k(x) = \displaystyle\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \bar{\gamma}_{k_1}(x'_1) \cdots \bar{\gamma}_{k_n}(x'_n)$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathrm{gr}_\bullet A$, $\quad \bar{\gamma}_k(\lambda.x) = \lambda^k.\bar{\gamma}_k(x)$.

(iii) $\bar{\gamma}_k(x).\bar{\gamma}_{k'}(x) = \binom{k+k'}{k}\bar{\gamma}_{k+k'}(x)$.

(iv) $\bar{\gamma}_k(\bar{\gamma}_{k'}(x)) = (kk')!/k!(k'!)^k \bar{\gamma}_{kk'}(x)$.

Rappelons encore une formule : si les γ_k sont des puissances divisées sur un idéal J,

$$\gamma_l(\gamma_{k_1}(x_1) \cdots \gamma_{k_n}(x_n)) = C_{l,\underline{k}} \gamma_{k_1 l}(x_1) \cdots \gamma_{k_n l}(x_n) \quad \text{où} \quad C_{l,\underline{k}} = \frac{(k_1 l)! \ldots (k_n l)!}{l!(k_1!)^l \ldots (k_n!)^l} \in \mathbf{N}.$$

Naturellement, cette formule est encore satisfaite par les $\bar\gamma_k$ si les x_i sont homogènes.

Soient $x, y \in J'$, $x = \sum_{i=r}^{s} x_i$ et $y = \sum_{i=r'}^{s'} y_i$, où x_i et y_i sont dans J'_i. On considère l'anneau $B = \mathbf{Z}[X_r, \dots, X_s, Y_{r'}, \dots, Y_{s'}]$ qu'on gradue en imposant que X_i et Y_i soient homogènes de degré i. Il existe un morphisme canonique d'algèbres graduées de B vers $\mathrm{gr}_\bullet A$ qui envoie X_i sur x_i et Y_i sur y_i. Introduisons I_B l'idéal d'augmentation de B et C l'enveloppe à puissances divisées de cet idéal. D'après la proposition 1.5.1 de [6], C est un $\mathbf{Z}$-module libre de base les $\underline{X}^{[\underline{k}]}.\underline{Y}^{[\underline{k}']}$. De plus C est encore graduée et les éléments $X_i^{[k_i]}$ et $Y_i^{[k_i]}$ sont homogènes de degré ik_i. Soient $\underline{k} \in \mathbf{N}^{s-r+1}$ et $\underline{k}' \in \mathbf{N}^{s'-r'+1}$, notons $\bar\gamma_{\underline{k}}(\underline{x}) = \bar\gamma_{k_r}(x_r) \cdots \bar\gamma_{k_s}(x_s)$ et définissons une application $\mathbf{Z}$-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \psi : & C & \to & \mathrm{gr}_\bullet A \\ & \underline{X}^{[\underline{k}]}\underline{Y}^{[\underline{k}']} & \mapsto & \bar\gamma_{\underline{k}}(\underline{x})\bar\gamma_{\underline{k}'}(\underline{y}). \end{array}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \psi(\underline{X}^{[\underline{k}]}\underline{Y}^{[\underline{k}']} \cdot \underline{X}^{[\underline{l}]}\underline{Y}^{[\underline{l}']}) &= \psi\left(\binom{\underline{k}+\underline{l}}{\underline{k}}\binom{\underline{k}'+\underline{l}'}{\underline{k}'}\underline{X}^{[\underline{k}+\underline{l}]}\underline{Y}^{[\underline{k}'+\underline{l}']}\right) \\ &= \binom{\underline{k}+\underline{l}}{\underline{k}}\binom{\underline{k}'+\underline{l}'}{\underline{k}'}\bar\gamma_{\underline{k}+\underline{l}}(\underline{x})\bar\gamma_{\underline{k}'+\underline{l}'}(\underline{y}) \\ &= \psi(\underline{X}^{[\underline{k}]}\underline{Y}^{[\underline{k}']}) \cdot \psi(\underline{X}^{[\underline{l}]}\underline{Y}^{[\underline{l}']}). \end{aligned}$$

Ceci montre que ψ est un morphisme d'algèbres.

Soit $T \in C$. Si T est de la forme $\underline{X}^{[\underline{k}]}.\underline{Y}^{[\underline{k}']}$, la formule rappelée plus haut entraîne que $T^{[l]} = \frac{\prod (k_i l)!(k'_i l)!}{l! \prod (k_i!)^l (k'_i!)^l} \underline{X}^{[\underline{k}l]}.\underline{Y}^{[\underline{k}'l]}$ et

$$\begin{aligned} \psi(T^{[l]}) &= \frac{\prod (k_i l)!(k'_i l)!}{l! \prod (k_i!)^l (k'_i!)^l}\bar\gamma_{\underline{k}l}(\underline{x})\bar\gamma_{\underline{k}'l}(\underline{y}) \\ &= \bar\gamma_l(\psi(T)). \end{aligned}$$

D'après (i), il en résulte aussi que si T est homogène, $\psi(T^{[l]}) = \bar\gamma_l(\psi(T))$. Si T est égal à $\sum_{i=r}^{s} T_i$ où T_i est homogène, $\psi(T_i)$ est homogène, et

$$T^{[l]} = \sum_{l_r + \cdots + l_s = l} \prod (T_i)^{[l_i]}.$$

Donc, par définition de $\bar\gamma_l$,

$$\psi(T^{[l]}) = \sum_{l_r + \cdots + l_s = l} \prod \bar\gamma_{l_i}(\psi(T_i)) = \bar\gamma_l(\psi(T)).$$

Cela montre que les applications $\bar\gamma_l$ vérifient les propriétés des puissances divisées et achève la démonstration du lemme.

2.1.3.7.2 Notations. Considérons $\mathcal{I}$, l'idéal de l'immersion diagonale : $X \to X \times_S X$, et $\mathcal{P}_{(m)}$ l'enveloppe à puissances divisées de niveau m de $(\mathcal{O}_{X\times X}, \mathcal{I})$. La PD-structure sur $\mathcal{P}_{(m)}$ sera notée $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \delta)$. L'algèbre $\mathcal{P}_{(m)}$ est munie de la filtration m-PD-adique par les $\mathcal{K}^{\{n+1\}}$. On désignera par $\mathcal{P}^n_{(m)}$ la PD-algèbre $\mathcal{P}_{(m)}/\mathcal{K}^{\{n+1\}}$, qu'on peut voir comme un faisceau sur X et qui est munie de la filtration induite par la filtration m-PD-adique. On notera $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}$ (respectivement $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}^n$), les algèbres graduées de $\mathcal{P}_{(m)}$ et $\mathcal{P}^n_{(m)}$ pour cette filtration. On introduit en outre l'homomorphisme canonique $\alpha : \mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{P}_{(m)}$ ainsi que les idéaux $\mathcal{K}' = \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{K}$ et $\mathcal{L}' = \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{L}$, de $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}_{(m)}$. De plus, on rappelle que

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{(m)}, \mathcal{O}_X),$$

si l'on considère la structure de $\mathcal{O}_X$-module sur $\mathcal{P}^n_{(m)}$ qui provient de la multiplication à gauche par $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_{X\times X}$, et que

$$\mathcal{D}^{(m)}_X = \varinjlim_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n}.$$

D'après le lemme, on peut définir une m-PD-structure sur $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}$: $(\mathcal{K}', \mathcal{L}', \bar{\delta})$. D'autre part, la proposition 1.4.5 de [6] montre que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \mathrm{gr}_0 \mathcal{P}$ est un isomorphisme. L'idéal $\mathcal{K}'$ est engendré par les classes des éléments de $\mathcal{K}$ dans le gradué, c'est donc l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}$; de même, l'idéal $\mathcal{K}'^{\{n\}}$ est engendré par les classes des éléments de $\mathcal{K}^{\{n\}}$ dans le gradué (par définition de $\bar{\delta}$), et donc, $\mathcal{K}'^{\{n\}}$ est l'idéal $\oplus_{l\geq n} \mathcal{K}^{\{l\}}/\mathcal{K}^{\{l+1\}}$. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}/\mathcal{K}'^{\{n\}} \simeq \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}^n.$$

Cet isomorphisme est un isomorphisme de m-PD-algèbres, si on munit $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{P}^n$ de la structure de m-PD-algèbre qui provient de celle de $\mathcal{P}^n_{(m)}$.

2.1.3.7.3 Proposition. *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées :*

$$\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}_X \simeq S^{(m)}(\mathcal{T}_X).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal définissant l'immersion diagonale $X \to X \times X$. Le faisceau Ω^1_X s'identifie à $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. L'homomorphisme α envoie $\mathcal{I}^n$ dans $\mathcal{K}^{\{n\}}$, si bien que l'on a un homomorphisme canonique : $\Omega^1_X \to \mathrm{gr}_1(\mathcal{P})$, d'où finalement un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$S_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X) \to \mathrm{gr}_\bullet(\mathcal{P}).$$

Comme l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathrm{S}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X)$ est envoyé dans $\mathscr{K}'$, qui est muni d'une m-PD-structure, la propriété universelle des puissances divisées entraîne qu'il existe un homomorphisme $\Gamma_{(m)}(\Omega^1_X) \to \mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}$, soit encore un homomorphisme $\nu\colon \Gamma^n_{(m)}(\Omega^1_X) \to \mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}^n_{(m)}$.

Vérifier que c'est un isomorphisme est une question locale. Plaçons-nous sur un ouvert affine U muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_N$. Soient $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathscr{I}$. Le faisceau Ω^1_X est libre sur U de base les τ_i, de sorte que d'après ([6] 1.3.5) le module $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}$ est libre sur U de base les $\tau_1^{\{k_1\}} \cdots \tau_N^{\{k_N\}}$ et les modules $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}^n_{(m)}$ sont libres de base les $\tau_1^{\{k_1\}} \cdots \tau_N^{\{k_N\}}$ avec $\sum k_i \leq n$. Si l'on note $\{\}'$ la m-PD-structure sur le m-PD-idéal de $\Gamma_{(m)}(\Omega^1_X)$, alors les modules $\Gamma^n_{(m)}(\Omega^1_X)$ sont libres de base $\tau_1^{\{k_1\}'} \cdots \tau_N^{\{k_N\}'}$ avec $\sum k_i \leq n$; via ces identifications, $\nu(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}'}) = \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$. Cela montre que ν est un isomorphisme. Par conséquent, le transposé ν' de ν induit un isomorphisme

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}^n_{(m)}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\nu'} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma^n_{(m)}(\Omega^1_X), \mathcal{O}_X).$$

Or, le module $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{P}^n, \mathcal{O}_X)$ s'identifie à $\oplus_{i=1}^n \mathrm{gr}_n \mathscr{D}^{(m)}_X$ et en passant à la limite inductive sur n pour les isomorphismes ν', on voit que l'on a construit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules entre $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}^{(m)}_X$ et $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{T}_X)$. Sur U, ces deux espaces sont des $\mathcal{O}_X$-modules libres de base duale respectivement les $\underline{\delta}^{\langle \underline{k}\rangle}$ et les $\underline{\tau}^{\langle \underline{k}\rangle}$ où par abus de notation on écrit $\delta^{\langle k_i\rangle}$ pour l'image de $\delta^{\langle k_i\rangle}$ dans le gradué. Alors, on a l'égalité $\nu'(\underline{\tau}^{\langle \underline{k}\rangle}) = \underline{\delta}^{\langle \underline{k}\rangle}$. Remarquons maintenant que la formule donnée dans 2.1.3.4 qui décrit le produit des éléments $\underline{\tau}^{\langle \underline{k}\rangle}$ entre eux est identique à la formule 2.2.4 de [6] qui est aussi valable dans le gradué et qui donne le produit des éléments $\underline{\delta}^{\langle \underline{k}\rangle}$. Cela montre finalement que ν' est un homomorphisme d'algèbres.

2.1.3.8 Dévissage des algèbres $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{E})$.

Soit $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres. Posons pour $0 \leq l \leq k$,

$$\Lambda^l_k = \sum_{i \geq l} \mathrm{Im}(\mathrm{S}^{(m)}_i(\mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}^{(m)}_{k-i}(\mathscr{F}) \to \mathrm{S}^{(m)}_k(\mathscr{F})).$$

Les Λ^l_k forment une filtration décroissante de $\mathrm{S}^{(m)}_k(\mathscr{F})$, les modules Λ^0_k et Λ^k_k étant respectivement isomorphes à $\mathrm{S}^{(m)}_k(\mathscr{F})$ et $\mathrm{S}^{(m)}_k(\mathscr{E})$.

2.1.3.9 Proposition. *Pour tout $l \leq k$, il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules sur X :*

$$0 \to \Lambda^{l+1}_k \to \Lambda^l_k \to \mathrm{S}^{(m)}_l(\mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}^{(m)}_{k-l}(\mathscr{G}) \to 0$$

Démonstration. Vérifions l'énoncé pour $l = 0$. Notons s la surjection $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, i l'injection $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, σ_k et j_k les applications induites par fonctorialité de $S_k^{(m)}(\mathcal{F})$ vers $S_k^{(m)}(\mathcal{G})$ et de $S_k^{(m)}(\mathcal{E})$ vers $S_k^{(m)}(\mathcal{F})$. Considérons U, un ouvert sur lequel les faisceaux considérés sont libres et $(g_1, \ldots, g_t)$ une base de $\mathcal{G}(U)$; alors il existe $y_i \in \mathcal{F}(U)$ tel que $s(y_i) = g_i$. Avec les notations de 2.1.3.4 on voit que $\sigma(y_i^{\langle k_i \rangle}) = g_i^{\langle k_i \rangle}$. Comme les éléments $g_i^{\langle k_i \rangle}$ engendrent $S^{(m)}(\mathcal{G})(U)$ comme $\mathcal{O}_X$-algèbre, ceci montre que les σ_k sont surjectifs. Sur U, la suite exacte du départ est scindée, et d'après 2.1.3.5, un tel scindage induit un isomorphisme :

$$S_l^{(m)}(\mathcal{F}) \simeq \sum_{k'+k''=l} S_{k'}^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes S_{k''}^{(m)}(\mathcal{G}).$$

Soit $e \otimes g \in S_{k'}^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes S_{k''}^{(m)}(\mathcal{G})$. Via une telle identification, si $k' \neq 0$,

$$\sigma_l(e \otimes g) = \sigma_{k'} \circ j_{k'}(e) \otimes g = 0.$$

Si $k' = 0$, on trouve :

$$\sigma_l(e_0 \otimes g_l) = e_0 g_l.$$

Ce calcul montre donc que Λ_k^1, qui s'identifie sur U à $\sum_{l=1}^k S_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes S_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G})$, est égal à $\operatorname{Ker} \sigma_k$. Si l est quelconque, considérons le composé φ_l :

$$S_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes S_{k-l}^{(m)}(\mathcal{F}) \to S_l^{(m)}(\mathcal{F}) \otimes S_{k-l}^{(m)}(\mathcal{F}) \to S_k^{(m)}(\mathcal{F}).$$

Le noyau de l'application $1 \otimes \sigma_{k-l}$ est $S_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda_{k-l}^1$ qui est inclus dans $\operatorname{Ker} \varphi_l$ comme on le voit localement, donc φ_l passe au quotient en une application

$$S_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes S_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G}) \to \Lambda_k^l / \Lambda_k^{l+1},$$

dont on vérifie à nouveau localement que c'est un isomorphisme.

2.1.3.10 Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors il existe des isomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_X$-modules :*

(i) $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \Gamma_{(m),n}(\mathcal{E}) \simeq \Gamma_{(m),n}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E})$.

(ii) $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes S_n^{(m)}(\mathcal{E}) \simeq S_n^{(m)}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E})$.

Démonstration. Les deux énoncés sont équivalents par dualité. Montrons par exemple (i). Nous noterons $\Gamma_n(\mathcal{E})$ le module $\Gamma_{(m),n}(\mathcal{E})$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines tels que $\mathcal{L}_{|U_i}$ et $\mathcal{E}_{|U_i}$ sont libres. Choisissons s_i une base de $\mathcal{L}$ sur chaque U_i et donnons-nous $a_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^*$ tels que $s_i = a_{i,j} s_j$. L'élément s_i induit une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{|U_i} & \to & \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}_{|U_i} \\ e & \to & s_i \otimes e. \end{array}$$

D'où par fonctorialité une application $\lambda_i : \Gamma_n(\mathscr{E})_{|U_i} \to \Gamma_n(\mathscr{L} \otimes \mathscr{E})_{|U_i}$. Notons

$$\begin{array}{rccc} \psi_i & : & \mathscr{L}^{\otimes n} \otimes \Gamma_n(\mathscr{E}) & \to & \Gamma_n(\mathscr{L} \otimes \mathscr{E}) \\ & & s_i^n \otimes \mathscr{E} & \to & \lambda_i(e). \end{array}$$

Montrons que les ψ_i se recollent. Si $(x_1, \ldots, x_t)$ est une base de $\mathscr{E}$ sur $U_i \bigcap U_j$, $(s_i \otimes x_1, \ldots, s_i \otimes x_t)$ forment une base de $\mathscr{L} \otimes \mathscr{E}$ sur U_i et il suffit de montrer que, pour $|\underline{k}| = n$, on a $\psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) = \psi_j(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}})$. Or,

$$\psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) = (s_i \otimes x_i)^{\{k_1\}} \cdots (s_t \otimes x_t)^{\{k_t\}}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_j(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) &= \psi_j(s_j^n \otimes a_{i,j}^n . \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) \\ &= (s_j \otimes a_{i,j} x_1)^{\{k_1\}} \cdots (s_j \otimes a_{i,j} x_t)^{\{k_t\}} \\ &= \psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}). \end{aligned}$$

Les ψ_i se recollent donc en une application ψ et il est clair que localement, ψ est un isomorphisme.

2.2 Calcul de la cohomologie des $\mathscr{D}$-modules cohérents sur l'espace projectif.

Dans cette partie, on fixe un entier $m \geq 0$. Si $m \geq 1$, A désignera une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre noethérienne ; si $m = 0$, A sera plus généralement un anneau noethérien quelconque. On se place ici dans un contexte algébrique : S est le schéma Spec$A$ et X désigne l'espace projectif de dimension N sur S. Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X$-module, $\mathscr{E}(r)$ sera le module $\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_X(r)$.

2.2.1 Algèbres de coefficients. Soit $\mathscr{B}^{(m)}$ une $\mathscr{O}_X$-algèbre commutative quasi-cohérente munie d'une structure compatible de $\mathscr{D}_X^{(m)}$-module à gauche (cf la définition 2.3.4 de [6]). On dit que $\mathscr{B}^{(m)}$ vérifie la condition (C) si $\mathscr{B}^{(m)}$ vérifie :

(a) Pour tout ouvert affine U de X, $\Gamma(U, \mathscr{B}^{(m)})$ est noethérien.

(b) (b1) $\forall (r, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{B}^{(m)}(r))$ est un A-module de type fini;

(b2) $\exists \rho \in \mathbf{Z} : \forall r \geq \rho$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{B}^{(m)}(r)) = 0$.

D'après la proposition 3.1.2 de [6], ces conditions assurent que $\mathscr{B}^{(m)} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}_X^{(m)}$ est un faisceau d'anneaux cohérent. Ce faisceau sera noté $\mathscr{D}^{(m)}$; il est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels qui sera notée $\mathrm{F}_k \mathscr{D}^{(m)}$.

L'algèbre $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ est acyclique : comme c'est un $\mathscr{D}_{X,\mathbf{Q}}$-module quasi-cohérent, cela résulte de la proposition 9.1 de [9], et de ce qu'il existe assez d'injectifs quasi-cohérents. Donc, si $n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{B}^{(m)})$ est un module de p-torsion (finie).

Comme exemples de coefficients qui vérifient ces conditions, nous aurons en tête, d'une part, le cas de $\mathcal{O}_X$, et d'autre part, le cas des coefficients $\mathscr{B}^{(m)}_X$ dont la définition est rappelée dans l'introduction ; dans ce cas, les propriétés cohomologiques annoncées résultent de l'appendice de Berthelot.

2.2.1.1 Proposition. *Soient $\mathscr{B}^{(m)}$ une algèbre de coefficients vérifiant la condition (C), et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{B}^{(m)}$-module cohérent, alors $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$ est un A-module de type fini pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Comme X est noethérien, le module $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents. L'algèbre $\mathscr{B}^{(m)}$ étant noethérienne, on en déduit qu'il existe une surjection $\mathscr{B}^{(m)}$-linéaire

$$(\mathscr{B}^{(m)}(-r))^a \to \mathscr{E}.$$

En itérant ce procédé, on voit que $\mathscr{E}$ admet une résolution par des modules du type $(\mathscr{B}^{(m)}(-r))^a$. Comme l'énoncé est vrai pour les modules $\mathscr{B}^{(m)}(-r)$ par hypothèse, cela montre la proposition.

On applique les résultats précédents, d'abord pour calculer la cohomologie de $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}^{(m)}(r)$, avec r assez grand, puis pour calculer la cohomologie du faisceau des opérateurs différentiels lui-même, twisté par un $\mathcal{O}_X(r)$, avec r assez grand. Finalement, on termine par une estimation de la cohomologie des $\mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}^{(m)}(r)$ pour tout $r \in \mathbf{Z}$, à partir de laquelle on montre que la cohomologie des $\mathscr{D}^{(m)}$-modules cohérents est de p-torsion finie. Dans l'hypothèse où $m = 0$, il faudra remplacer dans les résultats, p-torsion finie, par torsion finie.

2.2.2 Un théorème d'annulation. On établit ici la nullité des $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}(r))$ pour r assez grand, pour tout $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent $\mathscr{E}$.

2.2.2.1 Proposition. *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, tout $r \geq \rho$, et tout $n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathrm{gr}_k \mathscr{D}^{(m)}(r)) = 0$.*

Démonstration. Comme les faisceaux $\mathrm{gr}_k \mathscr{D}^{(m)}_X$ sont localement libres sur X, le gradué $\mathrm{gr}_k \mathscr{D}^{(m)}(r)$ s'identifie à $\mathscr{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}_k \mathscr{D}^{(m)}_X(r)$ et donc, d'après 2.1.3.7.3, à $\mathscr{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X}$

$\mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{T}_X)$. De plus, sur X, on dispose d'une résolution de $\mathscr{T}_X$:

$$0 \to \mathscr{O}_X \to (\mathscr{O}_X(1))^{N+1} \to \mathscr{T}_X \to 0.$$

En vertu de la proposition 2.1.3.9, il existe une filtration décroissante de $\mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{O}_X(1)^{N+1})$ par des $\mathscr{O}_X$-modules localement libres Λ_k^l tels que l'on ait des suites exactes

$$0 \to \Lambda_k^{l+1} \to \Lambda_k^l \to \mathrm{S}_l^{(m)}(\mathscr{O}_X) \otimes \mathrm{S}_{k-l}^{(m)}(\mathscr{T}_X) \to 0.$$

Notons $\Lambda_k'^l$ les faisceaux $\mathscr{B}^{(m)}(r) \otimes \Lambda_k^l$. Comme tous les faisceaux intervenant dans les suites exactes précédentes sont localement libres, ces suites restent exactes après tensorisation par $\mathscr{B}^{(m)}(r)$ et, en identifiant $\mathrm{S}_l^{(m)}(\mathscr{O}_X)$ à $\mathscr{O}_X$, on obtient des suites exactes F_k^l :

$$0 \to \Lambda_k'^{l+1} \to \Lambda_k'^l \to \mathrm{gr}_{k-l}\mathscr{D}^{(m)}(r) \to 0.$$

De plus $\Lambda_k'^0 \simeq \mathscr{B}^{(m)}(r) \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}\left(\mathscr{O}_X(1)^{N+1}\right)$, qui est encore isomorphe à $\mathscr{B}^{(m)}(k+r) \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{O}_X^{N+1})$, et $\Lambda_k'^k \simeq \mathscr{B}^{(m)}(r) \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{O}_X)$.

Les entiers r et m étant fixés, on procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, la proposition est vraie car $\mathrm{gr}_0\mathscr{D}^{(m)}(r) \simeq \mathscr{B}^{(m)}(r)$. Pour passer de $k-1$ à k, on montre par récurrence descendante sur l que $\Lambda_k'^l$ est acyclique pour Γ. Pour $l = k$, ceci est vrai puisque $r \geq \rho$. Supposons que ce soit vrai pour $\Lambda_k'^l$; par hypothèse de récurrence, $\mathrm{gr}_{k-l}\mathscr{D}^{(m)}(r)$ vérifie la même hypothèse d'acyclicité pour $l \geq 1$. En considérant la longue suite exacte de cohomologie de F_k^l, on en déduit que $\forall l \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \Lambda_k'^l) = 0$. Comme $\forall n \geq 1, \mathrm{H}^n(X, \Lambda_k'^0) = 0$, cela montre le résultat pour $\mathrm{gr}_k\mathscr{D}^{(m)}(r)$ en passant à la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite F_k^0.

2.2.2.2 Corollaire. *Pour tout $r \geq \rho$ et tout $k \in \mathbf{N}$,* $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{D}^{(m)}(r)) = 0$.

Démonstration. Partons des suites exactes courtes sur X :

$$0 \to \mathrm{F}_{k-1}(\mathscr{D}^{(m)})(r) \to \mathrm{F}_k(\mathscr{D}^{(m)})(r) \to \mathrm{gr}_k\mathscr{D}^{(m)}(r) \to 0.$$

Comme $\mathscr{D}_0^{(m)}(r)$ est isomorphe à $\mathscr{B}^{(m)}(r)$, qui est acyclique d'après la condition (b), on voit que $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{D}_0^{(m)}(r)) = 0$. D'après la proposition 2.2.2.1, $\mathrm{H}^n(X, \mathrm{gr}_k\mathscr{D}^{(m)}(r))$ est nul pour tout $n \geq 1$. En passant à la longue suite exacte de cohomologie associées aux suites exactes courtes ci-dessus, on en déduit par récurrence sur k que $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{D}_k^{(m)}(r))$ est nul pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $k \in \mathbf{N}$. Comme X est un schéma noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive et par passage à la limite inductive sur k, on en déduit le même résultat pour $\mathscr{D}^{(m)}(r)$.

2.2.2.3 Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent. Alors :*

(i) Il existe $r_0 \in \mathbf{Z}$ tel que, $\forall r \geq r_0$, il existe $s \in \mathbf{N}$ et une surjection $\mathscr{D}^{(m)}$ linéaire :

$$(\mathscr{D}^{(m)}(-r))^s \to \mathscr{E}.$$

(ii) Il existe $r_0 \in \mathbf{Z}$ tel que, $\forall r \geq r_0$, $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}(r)) = 0$.

Démonstration. Comme X est un schéma noethérien, $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents. Il existe donc un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ et une surjection $\mathscr{D}^{(m)} \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{E}$. Or, il existe $r_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $\forall r \geq r_0$ il existe une surjection $\mathscr{O}_X$ linéaire $\mathscr{O}_X(-r)^s \to \mathscr{F}$, d'où le (i). Le (ii) se démontre par récurrence descendante sur n. Pour $n = N+1$, c'est vrai car les faisceaux considérés sont quasi-cohérents. Passons de n à $n-1$: soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent et une surjection $\mathscr{D}^{(m)}(-r)^s \to \mathscr{E}$, dont le noyau est $\mathscr{R}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $r_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall r \geq r_0$, $\forall n' \geq n$, $\mathrm{H}^{n'}(X, \mathscr{R}(r)) = 0$. Soit $r_1 = max(r_0, \rho + r)$, alors, en vertu de 2.2.2.2, pour $n' \geq n-1$ et $r \geq r_1$, $\mathrm{H}^{n'}(X, \mathscr{E}(r_1)) = \mathrm{H}^{n'+1}(X, \mathscr{R}(r_1)) = 0$, d'où (ii).

2.2.3 Cohomologie de $\mathrm{gr}_k \mathscr{D}^{(m)}(r)$ si $r \in \mathbf{Z}$.

2.2.3.1 Lemme. *Soient X un schéma de dimension relative N sur S et $\mathscr{E}_0, \ldots, \mathscr{E}_{N-1}$, $\mathscr{F}$ des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, et tels que $\mathscr{F}$ admette une résolution :*

$$\mathscr{E}_{N-1} \to \ldots\ldots \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F} \to 0.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{F}) = 0$.

Démonstration. On peut par exemple montrer par récurrence sur $s \in \mathbf{N}$ que si $\mathscr{F}$ admet une résolution : $\mathscr{E}_s \to \ldots\ldots \to \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F} \to 0$, où les $\mathscr{E}_i$ sont cohomologiquement triviaux sur X, alors pour tout $n \geq N - s$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{F}) = 0$.

2.2.3.2 Notations.

Soient $\mathscr{A}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-algèbres graduées, noethériennes, quasi-cohérentes, et $(\mathscr{A}_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ ses composantes homogènes. Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{A}$-module gradué, $\mathscr{M}(r) = \oplus \mathscr{M}_k(r)$ est gradué pour tout $r \in \mathbf{Z}$, et $\mathscr{M}[i]$ pour $i \in \mathbf{Z}$ désigne le $\mathscr{A}$-module gradué défini par $\mathscr{M}_k[i] = \mathscr{M}_{k+i}$.

Remarque. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module localement libre de type fini, la $\mathscr{B}^{(m)}$-algèbre $\mathscr{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{F})$ est noethérienne car $\mathscr{B}^{(m)}$ est noethérienne et l'algèbre $\mathrm{S}^{(m)}(\mathscr{F})$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini comme on l'a vu en 2.1.3.6.

2.2.3.3 Lemme. *Soit $\mathscr{M}$ un faisceau de $\mathscr{A}$-modules gradués, cohérent comme $\mathscr{A}$-module. Alors, il existe $(r,s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbf{Z}^s$ tels que l'on ait une surjection graduée*

$$\oplus_{i=1}^{s} \mathscr{A}(r)[\alpha_i] \to \mathscr{M} \to 0.$$

Démonstration. Comme X est noethérien, $\mathscr{M}$ est limite inductive de ses sous-faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{M}$ étant de plus $\mathscr{A}$-cohérent, il existe $(r,s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ et une surjection $\mathscr{A}$-linéaire : $\mathscr{A}^s(-r) \to \mathscr{M}$, soit encore une surjection $\sigma : \mathscr{A}^s \to \mathscr{M}(r)$. Le faisceau $\mathscr{M}$ est somme directe de ses composantes homogènes, donc $\mathscr{M}(r) = \oplus \mathscr{M}_k(r)$ et $\Gamma(X, \mathscr{M}(r)) = \oplus \Gamma(X, \mathscr{M}_k(r))$.

Soient e_i un élément de la base canonique de $\mathscr{A}^n$ et $f_i = \sigma(e_i)$. Soient $f_{i,k}$ la section globale de $\mathscr{M}_k(r)$ qui est la composante homogène de degré k de e_i, et $t_i = \max\{|k| : f_{i,k} \neq 0\}$. On peut alors définir :

$$\begin{array}{rcccc} \sigma' & : & \oplus_{i=1}^{s} \oplus_{j=-t_i}^{t_i} \mathscr{A}[-j] & \to & \mathscr{M}(r) \\ & & \oplus a_{i,j} & \mapsto & \sum a_{i,j} f_{i,j}. \end{array}$$

Par définition, σ' est gradué ; d'autre part, sur un ouvert affine U, $\mathscr{M}(r)$ est engendré comme $\mathscr{A}$-module par $e_1, \ldots, e_s$; or e_i est égal à $\sum_j f_{i,j}$, donc σ' est surjectif.

2.2.3.4 Corollaire. *Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module gradué ($\mathscr{M} = \oplus \mathscr{M}_k$), cohérent comme $\mathscr{A}$-module et $l \in \mathbf{N}$. Alors, il existe $(r_1, \ldots, r_l) \in \mathbf{Z}^l$, $(s_1, \ldots, s_l) \in \mathbf{N}^l$ et, pour tout $1 \leq i \leq l$,*
$(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{s_i}^i) \in \mathbf{Z}^{s_i}$ tels que l'on ait une résolution graduée :

$$\oplus_{j=i}^{s_l} \mathscr{A}(r_l)[\alpha_j^l] \to \ldots\ldots \to \oplus_{j=1}^{s_1} \mathscr{A}(r_1)[\alpha_j^1] \to \mathscr{M} \to 0.$$

Démonstration. Il suffit d'itérer le lemme 2.2.3.3, puisque le noyau d'un morphisme gradué entre $\mathscr{A}$-modules gradués et cohérents est lui aussi gradué et cohérent. On peut ainsi construire des résolutions de longueur arbitrairement grande.

Remarque. En passant aux composantes homogènes, on obtient une résolution des $\mathscr{M}_k$ par des $\mathscr{A}_{k-\alpha_j^i}(r_i)$.

2.2.3.5 Proposition. *Soit $r \in \mathbf{Z}$, alors il existe $k_0 \in \mathbf{N}$, tel que, $\forall k \geq k_0$ et $\forall n \geq 1$,*

$$\mathrm{H}^n(X, \mathscr{B}^{(m)} \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{I}_X)(r)) = 0.$$

Démonstration. Soient $\mathscr{M} = \oplus_{k\in\mathbf{N}}\mathscr{B}^{(m)} \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{T}_X)$ et $\mathscr{A} = \oplus_{k\in\mathbf{N}}\mathscr{B}^{(m)} \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{O}(1))^{N+1}$. On considérera $\mathscr{A}$ comme gradué par $\mathbf{Z}$ en posant $\mathscr{A}_{-k} = 0$ si $k \in \mathbf{N}$. La surjection $\mathscr{O}_X(1)^{N+1} \to \mathscr{T}_X$ induit un morphisme surjectif gradué d'algèbres graduées $\mathscr{A} \to \mathscr{M}$ qui fait de $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module gradué, cohérent, puisque $\mathscr{M}$ est quasi-cohérent et que $\mathscr{A}$ est noethérienne. On peut alors appliquer le corollaire 2.2.3.4 avec $l = N$ pour obtenir une résolution de $\mathscr{M}(r)$ et passer aux composantes homogènes dans cette résolution. Considérons

$$k_0 = \max_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq s_i}\{\rho - \alpha_j^i - r_i - r\}.$$

Du fait que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{A}_{k+\alpha_j^i}(r_i + r) \simeq \mathscr{B}^{(m)}(k + \alpha_j^i + r_i + r) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{O}_X^{N+1}),$$

les faisceaux $\mathscr{A}_k(r_i + r)[\alpha_j^i]$ sont acycliques pour $k \geq k_0$ et le module $\mathscr{M}_k(r)$ vérifie les conditions du lemme 2.2.3.1, d'où la proposition.

2.2.3.6 Corollaire. *Fixons $r \in \mathbf{Z}$. Alors,*

(i) $\forall n \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{D}^{(m)}(r))$ est un A-module de type fini de p-torsion.

(ii) Le conoyau de l'homomorphisme gradué injectif

$$\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)}(r)) \to \Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}(r))$$

est de type fini sur A, nul en degrés assez grands.

Démonstration. Pour alléger les notations, on supposera que r vaut 0. Considérons les suites exactes E_k^l :

$$0 \to \mathrm{F}_k\mathscr{D}^{(m)} \to \mathrm{F}_{k+l}\mathscr{D}^{(m)} \to \mathrm{F}_{k+l}\mathscr{D}^{(m)}/F_k\mathscr{D}^{(m)} \to 0.$$

Rappelons que $\mathrm{gr}_k\mathscr{D}^{(m)} \simeq \mathscr{B}^{(m)} \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathscr{T}_X)$ et considérons un k_0 comme dans la proposition. Il existe aussi des suites exactes F_l :

$$0 \to \mathrm{F}_{k_0+l}\mathscr{D}^{(m)}/\mathrm{F}_{k_0}\mathscr{D}^{(m)} \to F_{k_0+l+1}\mathscr{D}^{(m)}/\mathrm{F}_{k_0}\mathscr{D}^{(m)} \to \mathrm{gr}_{k_0+l+1}\mathscr{D}^{(m)} \to 0.$$

Si $k \geq k_0$, les suites exactes F_l permettent de montrer par récurrence sur l à partir de $l = 0$ que les faisceaux $\mathrm{F}_{k_0+l}\mathscr{D}^{(m)}/\mathrm{F}_{k_0}\mathscr{D}^{(m)}$ sont acycliques. Finalement, en passant à la longue suite exacte de cohomologie associée à $E_{k_0}^l$, on voit que :

- il existe une surjection $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{F}_{k_0}\mathcal{D}^{(m)}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathrm{F}_{k_0+l}\mathcal{D}^{(m)})$;

- si $n \geq 2$, $\mathrm{H}^n(X, \mathrm{F}_{k_0}\mathcal{D}^{(m)}) \simeq \mathrm{H}^n(X, \mathrm{F}_{k_0+l}\mathcal{D}^{(m)})$.

Prenons la limite inductive sur l des $\mathrm{F}_{k_0+l}\mathcal{D}^{(m)}$: comme le schéma X est noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive, donc $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{D}^{(m)})$ est un quotient de $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{F}_{k_0}\mathcal{D}^{(m)})$ et si $n \geq 2$, $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{D}^{(m)}) \simeq \mathrm{H}^n(X, \mathrm{F}_{k_0}\mathcal{D}^{(m)})$. Comme $\mathrm{F}_{k_0}\mathcal{D}^{(m)}$ est un $\mathcal{B}^{(m)}$-module cohérent, sa cohomologie est de type fini sur A, d'après 2.2.1.1 et il en va de même de la cohomologie de $\mathcal{D}^{(m)}$. De plus, comme il a été rappelé dans l'introduction, les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)} \otimes \mathbf{Q}$ sont acycliques, ie $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathbf{Q}}) = \mathrm{H}^n(X, \mathcal{D}^{(m)}) \otimes \mathbf{Q} = 0$. Donc la cohomologie de $\mathcal{D}^{(m)}$ est de torsion (finie), ce qui montre la première assertion.

Pour $k \geq k_0$, notons

$$N'_l = \ker(\mathrm{H}^1(X, F_{k_0}\mathcal{D}^{(m)}) \to \mathrm{H}^1(X, F_k\mathcal{D}^{(m)})),$$

et

$$N_k = \ker(\mathrm{H}^1(X, F_k\mathcal{D}^{(m)}) \to \mathrm{H}^1(X, F_{k+1}\mathcal{D}^{(m)})),$$

qui sont des A-modules de type fini. Les N'_k forment une suite croissante de sous-modules de $\mathrm{H}^1(X, F_{k_0}\mathcal{D}^{(m)})$, qui est noethérien. Cette suite est stationnaire et il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ tel que $N'_{l_0} = N'_{l_0+1}$, c'est-à-dire que pour $k \geq l_0$, N_k est nul. Avec cette remarque, pour $k \geq l_0$, on tire des suites exactes E_k^{k+1}, des suites exactes

$$0 \to \Gamma(X, \mathrm{F}_k\mathcal{D}^{(m)}) \to \Gamma(X, \mathrm{F}_{k+1}\mathcal{D}^{(m)}) \to \Gamma(X, \mathrm{gr}_{k+1}\mathcal{D}^{(m)}) \to 0,$$

d'où l'énoncé.

2.2.3.7 Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}$-module cohérent. Alors, $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{E})$ est un A-module de type fini de p-torsion.*

Démonstration. On procède par récurrence descendante sur n, et on montre que si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent et si $l \geq n$, $\mathrm{H}^l(X, \mathcal{E})$ est un A-module de type fini de p-torsion. En effet, c'est vrai si $n = N + 1$. Ensuite, d'après 2.2.2.3, il existe une surjection $\mathcal{D}^{(m)}$-linéaire : $(\mathcal{D}^{(m)}(-r))^s \to \mathcal{E}$. D'après 2.2.3.6, si $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathcal{D}^{(m)}(-r))$ est un A-module de type fini de p-torsion, ce qui permet de procéder par récurrence.

2.3 Calcul de la cohomologie des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents sur l'espace projectif.

2.3.1 Préliminaires. Dans cette partie, A est un anneau noethérien, complet pour la topologie p-adique. On considère $\mathscr{S} = \operatorname{Spf} A$ et $\mathscr{X}$ l'espace projectif formel de dimension N sur $\mathscr{S}$. Les notations X, X_i et α_i désigneront respectivement l'espace projectif algébrique $\mathbf{P}^N_S$, la réduction modulo p^{i+1} de cet espace projectif et l'immersion fermée $X_i \hookrightarrow X$.

Soit $\mathscr{B}^{(m)}$ une $\mathscr{O}_X$-algèbre, vérifiant la condition (C) de 2.2.1. On note toujours $\mathscr{D}^{(m)} = \mathscr{B}^{(m)} \otimes \mathscr{D}^{(m)}_X$, et on introduit $\mathscr{D}^{(m)}_i = \alpha_i^* \mathscr{D}^{(m)}$ et $\hat{\mathscr{D}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathscr{D}^{(m)}_i$. C'est un faisceau d'anneaux cohérent, à sections noethériennes sur les ouverts affines d'après 3.3.4 de [6].

Etant donné un système inductif d'algèbres, indexé par m, vérifiant chacune la condition (C), on dira que $(\mathscr{B}^{(m)})$ vérifie la condition (C') si :

(c) Le morphisme $\mathscr{B}^{(m)} \to \mathscr{B}^{(m+1)}$ est $\mathscr{D}^{(m)}_X$-linéaire à gauche.

On en déduit des morphismes d'anneaux $\varphi_{m,m+1} : \mathscr{D}^{(m)} \to \mathscr{D}^{(m+1)}$ qui doivent satisfaire

(d) Les morphismes complétés $\hat{\varphi}_{(m,m+1)}$, tensorisés par $\mathbf{Q}$, sont plats à droite et à gauche.

Si $(\mathscr{B}^{(m)})$ vérifie (C'), on notera $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$; c'est un faisceau d'anneaux cohérent d'après la proposition 3.3.4 de [6].

Remarques.

(i) Considérons $\mathscr{B}^{(m)}_t$ la partie de torsion de $\mathscr{B}^{(m)}$ et $\mathscr{B}'^{(m)} = \mathscr{B}^{(m)}/\mathscr{B}^{(m)}_t$. Comme X est quasi-compact et que $\mathscr{B}^{(m)}$ est noethérienne, il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $p^c \mathscr{B}^{(m)}_t = 0$. Construisons $\mathscr{D}'^{(m)}$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathscr{B}'^{(m)}$, ainsi que son complété $\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}$. Alors, on voit facilement que le morphisme canonique $\hat{\mathscr{D}}^{(m)} \to \hat{\mathscr{D}}'^{(m)}$ est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbf{Q}$. Pour obtenir un théorème d'acyclicité pour les modules cohérents sur $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$, il suffira donc de regarder si l'algèbre $\mathscr{B}'^{(m)}$ vérifie la condition (C).

(ii) Naturellement, le système inductif constant égal à $\mathscr{O}_X$ vérifie la condition (C') ; c'est aussi le cas des coefficients $\mathscr{B}^{(m)}_X$, d'après 4.2.1 et 4.2.2 de [6].

Dans la suite de cette partie, on considérera toujours des coefficients vérifiant la condition (C) si m est fixé ou (C') si m varie. Pour obtenir des théorèmes d'acyclicité, on commencera par comparer la cohomologie d'un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent à celle de son complété p-adique. On en déduira des résultats pour les $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-modules cohérents analogues à ceux obtenus pour les $\mathscr{D}^{(m)}$-modules cohérents. Finalement il sera facile d'en déduire les propriétés comparables des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents, par des arguments de passage à la limite inductive, puisque $\mathscr{X}$ est noethérien.

2.3.2 Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent et $\hat{\mathscr{E}} = \varprojlim_i \mathscr{E}/p^{i+1}\mathscr{E}$. Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}) = \varprojlim_i \mathrm{H}^n(X_i, \mathscr{E}/p^{i+1}\mathscr{E})$;

(ii) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}) \simeq \mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}})$;

(iii) $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}) \simeq \varprojlim_i \Gamma(X, \mathscr{E})/p^{i+1}\Gamma(X, \mathscr{E})$.

Démonstration. Notons $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}/p^{i+1}\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{E}_t$, la partie de torsion de $\mathscr{E}$: c'est un $\mathscr{D}^{(m)}$ module cohérent par noethérianité de $\mathscr{D}^{(m)}$. Introduisons alors $\mathscr{G} = \mathscr{E}/\mathscr{E}_t$ qui est aussi un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent. D'après 2.2.3.7, il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que tel que $p^c\mathscr{E}_t$, $p^c\mathrm{H}^n(X, \mathscr{G})$ et $p^c\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$ soient nuls pour tout $n \geq 1$. Montrons d'abord (i) et (ii). Soient $i, j \geq c$. Considérons la suite exacte courte :

$$0 \to \mathscr{G} \xrightarrow{\nu_i} \mathscr{E} \to \mathscr{E}_i \to 0,$$

où ν_i est la factorisation de la multiplication par p^i sur $\mathscr{E}$, et les morphismes de suites exactes $\mu_{i+j,i}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{G} & \xrightarrow{\nu_{i+j}} & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}_{i+j} & \to & 0. \\ & & \downarrow \times p^j & & \downarrow id & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathscr{G} & \xrightarrow{\nu_i} & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}_i & \to & 0 \end{array}$$

D'où un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^n(X, \mathscr{G}) & \to & \mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}) & \to & \mathrm{H}^n(X_{i+j}, \mathscr{E}_{i+j}) & \to & \mathrm{H}^{n+1}(X, \mathscr{G}) \\ \downarrow p^j & & \downarrow id & & \downarrow \lambda_{i+j,i} & & \downarrow p^j \\ \mathrm{H}^n(X, \mathscr{G}) & \to & \mathrm{H}^n(X, \mathscr{E}) & \to & \mathrm{H}^n(X_i, \mathscr{E}_i) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{H}^{n+1}(X, \mathscr{G}). \end{array}$$

Alors, si $j \geq c$, $\tau \circ \lambda_{i+j,i} = 0$, ce qui signifie que $\mathrm{Im}(\lambda_{i+j,i}) = \mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$ et le système projectif des $\mathrm{H}^n(X_i, \mathscr{E}_i)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler pour tout $n \geq 0$. On en déduit que $\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}) = \varprojlim_i \mathrm{H}^n(X_i, \mathscr{E}_i)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et donc le (i). En outre, pour tout $n \geq 1$, la limite projective $\varprojlim_i \mathrm{H}^n(X_i, \mathscr{E}_i)$ s'identifie à $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$, puisque le système projectif des $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{G})$ est essentiellement nul pour tout $n \geq 1$, d'où (ii).

Comparons maintenant les limites projectives $\varprojlim_i \Gamma(X_i, \mathscr{E}_i)$ et $\varprojlim_i (\Gamma(X, \mathscr{E})/p^i)$. Soient i et $j \geq c$. Partons de la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{E}_t \to \mathscr{E} \xrightarrow{p^i} \mathscr{E} \to \mathscr{E}_i \to 0.$$

Cette suite se scinde en deux suites exactes courtes :

$$0 \to \mathscr{E}_t \to \mathscr{E} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathscr{G} \xrightarrow{\nu_i} \mathscr{E} \to \mathscr{E}_i \to 0.$$

Par passage à la longue suite exacte de cohomologie, on en déduit deux suites exactes :

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{E}_t) \to \Gamma(X, \mathscr{E}) \xrightarrow{u} \Gamma(X, \mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{E}_t)$$

et

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\nu_i} \Gamma(X, \mathscr{E}) \to \Gamma(X_i, \mathscr{E}_i) \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}).$$

On déduit de cette dernière suite exacte et du morphisme $\mu_{i+j,i}$ un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{G}) & \xrightarrow{\nu_{i+j}} & \Gamma(X, \mathscr{E}) & \to & \Gamma(\mathscr{E}_{i+j}) & \to & \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \\
 & & \downarrow p^j & & \downarrow & & \downarrow \lambda_{i+j,i} & & \downarrow p^j \\
0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{G}) & \xrightarrow{\nu_i} & \Gamma(X, \mathscr{E}) & \to & \Gamma(\mathscr{E}_i) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}).
\end{array}$$

Comme $\nu_i \circ u$ est la multiplication par p^i sur $\Gamma(X, \mathscr{E})$, on obtient une surjection canonique

$$\sigma_i : \Gamma(X, \mathscr{E})/p^i\Gamma(X, \mathscr{E}) \to \Gamma(X, \mathscr{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathscr{G})).$$

Les σ_i forment un homomorphisme de systèmes projectifs. Grâce à la multiplication par p^i, le noyau de σ_i s'identifie à $\operatorname{coker} u$ qui se plonge dans $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{E}_t)$ et est donc annulé par p^c. D'autre part, l'homomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & \mathscr{E}_t & \to & \mathscr{E} & \xrightarrow{p^{i+j}} & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}_{i+j} & \to & 0 \\
 & & \downarrow p^j & & \downarrow p^j & & \downarrow id & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{E}_t & \to & \mathscr{E} & \xrightarrow{p^i} & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}_i & \to & 0,
\end{array}$$

induit un homomorphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \operatorname{coker} u & \to & \Gamma(X, \mathscr{E})/p^{i+j}\Gamma(X, \mathscr{E}) & \to & \Gamma(X, \mathscr{E})/\nu_{i+j}(\Gamma(X, \mathscr{G})) & \to & 0 \\
 & & \downarrow p^j & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{coker} u & \to & \Gamma(X, \mathscr{E})/p^i\Gamma(X, \mathscr{E}) & \to & \Gamma(X, \mathscr{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathscr{G})) & \to & 0.
\end{array}$$

On en déduit que le système projectif des $\operatorname{Ker} \sigma_i$ est essentiellement nul, puisque $\operatorname{coker} u$ est annulé par p^c. Par conséquent, les applications σ_i induisent un isomorphisme entre les deux limites projectives $\varprojlim_i (\Gamma(X, \mathscr{E})/p^i)$ et $\varprojlim_i (\Gamma(X, \mathscr{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathscr{G})))$, et donc entre $\varprojlim_i (\Gamma(X, \mathscr{E})/p^i)$ et $\varprojlim_i \Gamma(X_i, \mathscr{E}_i)$, qui coïncide encore avec $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}})$. D'où finalement le (iii).

2.3.3 Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent. Alors :*

(i) Il existe $r_0 \in \mathbf{N}$ tel que, $\forall r \geq r_0$, il existe $s \in \mathbf{N}$ et une surjection $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-linéaire :

$$(\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r))^s \to \mathscr{E}.$$

(ii) Il existe $r_0 \in \mathbf{N}$ tel que, $\forall r \geq r_0$, $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}(r)) = 0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que, compte tenu de 2.3.2 et de 2.2.2.2, l'assertion (ii) résulte de (i) comme en 2.2.2.3. Si $\mathscr{E}$ est un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent, sa partie de torsion $\mathscr{E}_t$ est aussi un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent car $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$ est à sections noethériennes sur les ouverts affines. De plus, il existe une suite exacte : $0 \to \mathscr{E}_t \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{E}_t \to 0$. Soient $\mathscr{G} = \mathscr{E}/\mathscr{E}_t$ et $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}/p\mathscr{G}$. Comme $\mathscr{E}_t$ est cohérent et que $\mathscr{X}$ est quasi-compact, il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $p^a\mathscr{E}_t = 0$. Pour $i \geq a$ on en déduit une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{G}_0 \xrightarrow{p^i} \alpha_{i+1}^*\mathscr{E} \to \alpha_i^*\mathscr{E} \to 0.$$

Le module $\mathscr{G}_0$ est un $\mathscr{D}_0^{(m)}$-module cohérent : choisissons r_1 tel que $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{G}_0(r)) = 0$ pour tout $r \geq r_1$. Pour tout $r \geq r_1$ et tout $i \geq a$, les homomorphismes $\Gamma(X_{i+1}, \alpha_{i+1}^*\mathscr{E}(r)) \to \Gamma(X_i, \alpha_i^*\mathscr{E}(r))$ sont alors surjectifs. Comme $\alpha_a^*\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}_a^{(m)}$-module cohérent, il existe $r_2 \in \mathbf{Z}$ tel que, pour tout $r \geq r_2$, il existe $s \in \mathbf{N}$ et une surjection $(\mathscr{D}_a^{(m)})^s \to \alpha_a^*\mathscr{E}(r)$. Soient $r_0 = sup(r_1, r_2)$, et $r \geq r_0$. Si e_t est le t-ième vecteur de la base canonique de $(\mathscr{D}_a^{(m)})^s$, on peut ainsi relever les $\lambda_a(e_t)$ pour $1 \leq t \leq s$ dans $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E}(r))$, ce qui définit un homomorphisme $\lambda\colon (\hat{\mathscr{D}}^{(m)})^s \to \mathscr{E}(r)$, qui est surjectif car, modulo p^a, c'est un morphisme surjectif entre deux faisceaux provenant de $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-modules cohérents.

2.3.4 Proposition. *Soit $\mathscr{E}$ un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent. Alors :*

(i) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \mathscr{E})$ est un $\mathscr{V}$-module de torsion de type fini,

(ii) $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E}) \simeq \varprojlim_i \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E})/p^i\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{E})$.

Démonstration. Compte tenu de 2.3.3 et de 2.3.2 appliqué aux faisceaux $\mathscr{D}^{(m)}(r)$, la démonstration de (i) est identique à celle donnée en 2.2.3.7. La démonstration de (ii) est alors identique à la démonstration de (iii) dans 2.3.2 puisqu'il existe $c \in \mathscr{C}$ tel que $p^c\mathscr{E}_t = 0$ et tel que $p^c\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \mathscr{G}) = p^c\mathrm{H}^n(\mathscr{X}, \mathscr{E}) = 0$, pour tout $n \geq 1$, avec les notations de 2.3.2.

2.3.5 Théorème. *Soit $\mathcal{B}^{(m)}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, vérifiant la condition (C) (resp. un système inductif de coefficients vérifiant la condition (C')) et $\mathcal{E}$ un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent (resp. un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent). Alors :*

(i) Il existe $r_0 \in \mathbf{N}$ tel que, $\forall r \geq r_0$, il existe $s \in \mathbf{N}$ et une surjection $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-linéaire :

$$(\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}(-r))^s \to \mathcal{E}, \quad (\text{resp. } \; \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}})$$

(ii) $\forall n \geq 1$, $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = 0$.

Démonstration. Montrons (i) dans le cas d'un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$. D'après la proposition 3.4.5 de [6] un tel module $\mathcal{E}$ admet un modèle entier $\mathcal{F}$ qui est un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$-module cohérent. Appliquons la proposition 2.3.3 à ce module, on obtient une surjection $(\hat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))^s \to \mathcal{F}$, et en tensorisant par $\mathbf{Q}$, on voit que $\mathcal{E}$ est quotient d'un $(\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}(-r))^s$. Si maintenant $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent, d'après 3.6.2 de [6], il existe un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}} \mathcal{F}$. En appliquant le (i) à $\mathcal{E}$, on trouve alors une surjection comme cherchée.

Si m est fixé, remarquons que $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}(r)) = \mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}(r)) \otimes K$ est nul pour tout $r \in \mathbf{Z}$ et tout $n \geq 1$, d'après 2.2.3.7 et 2.3.2. On montre donc (ii) à partir de (i), par récurrence descendante sur N. Ensuite, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent, il existe un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}} \mathcal{F}$. Notons $\mathcal{F}^{(m')} = \mathcal{D}^{(m')} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}} \mathcal{F}$. Alors $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \varinjlim_{m'} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}^{(m')}) = 0$ si $n \geq 1$.

2.4 Propriétés de finitude des sections globales

On s'intéresse ici à des coefficients particuliers vérifiant une condition supplémentaire à la condition (C). Avec cette condition, nous établissons que $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$ et $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)})$ sont des anneaux noethériens. De plus, si $\mathcal{E}$ est un $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent, alors $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ est un $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathbf{Q}})$-module de type fini.

2.4.1 Conditions sur les coefficients.

Dans cette sous-section, m est fixé.

2.4.1.1 Définition.

Soient $\mathcal{B}^{(m)}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres vérifiant la condition (C), $B = \Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)})$. On dit que $\mathcal{B}^{(m)}$ vérifie la condition (D), si :

(i) L'algèbre B est une A-algèbre noethérienne ;

(ii) Comme $\mathcal{O}_X$-module, $\mathscr{B}^{(m)}$ est engendrée par ses sections globales.

Remarque. Il est évident que $\mathcal{O}_X$ vérifie la condition (D). D'autre part, nous montrerons en 3.1.1.3 que $\mathscr{B}_X^{(m)}$ satisfait aussi la condition (D), par un calcul des sections globales.

Considérons l'algèbre $B \otimes_A \mathcal{O}_X$. Comme $\mathcal{O}_X$ est de type fini sur A, cette algèbre est quasi-cohérente et noethérienne, donc cohérente.

2.4.1.2 Lemme. *Soit $\mathscr{E}$ un $B \otimes_A \mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$ est un B-module de type fini.*

Démonstration. Comme X est noethérien, le module $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents. On en déduit qu'il existe une surjection $B \otimes_A \mathcal{O}_X$-linéaire

$$(B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))^a \to \mathscr{E}.$$

En itérant ce procédé, on voit que $\mathscr{E}$ admet une résolution par des modules du type $(B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))^a$. Cela nous ramène à montrer l'énoncé dans le cas où $\mathscr{E} = B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r)$. Or, les modules de cohomologie de $\mathcal{O}_X(-r)$ étant plats sur A pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a l'égalité : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{H}^n(X, B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r)) = B \otimes_A \mathrm{H}^n(X, \mathcal{O}_X(-r))$. En particulier $\mathrm{H}^n(X, B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))$ est un B-module de type fini. D'où le lemme.

2.4.1.3 Proposition. *Soit $\mathscr{B}^{(m)}$ une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D), alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{E})$ est un B-module de type fini pour tout $\mathscr{B}^{(m)}$-module cohérent $\mathscr{E}$.*

Démonstration. D'après la condition (ii) de (D), il existe une surjection de $\mathcal{O}_X$-algèbres : $B \otimes_A \mathcal{O}_X \to \mathscr{B}^{(m)}$. Tout module $\mathscr{B}^{(m)}$-cohérent peut donc être considéré comme un $B \otimes_A \mathcal{O}_X$-module cohérent. La conclusion résulte alors de 2.4.1.2.

2.4.2 Sections globales des $\mathscr{D}$-modules sur l'espace projectif.

2.4.2.1 Lemme. *(i) L'algèbre $\Gamma(X, \mathrm{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ est une A-algèbre de type fini.*

(ii) Le module $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(r) \otimes \mathrm{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ est de type fini sur $\Gamma(X, \mathrm{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ pour tout $r \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Introduisons $\mathscr{A} = \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$. Remarquons que

$$\Gamma(X,\mathscr{A}) = \oplus_{k\in\mathbf{N}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(k)\otimes \mathbf{S}^{(m)}_k(\mathcal{O}_X^{N+1})).$$

Notons $T_0,\dots,T_N$ la base canonique de $\mathcal{O}_X^{N+1}$ et $[x_0,\dots,x_N]$ les coordonnées projectives sur X, alors

$$\Gamma(X,\mathscr{A}) = \oplus_{|\underline{\alpha}|=|\underline{k}|}A\cdot x_0^{\alpha_0}\cdots x_N^{\alpha_N}T_0^{(k_0)}\cdots T_N^{(k_N)}.$$

Soit C la sous-V-algèbre de $\mathscr{A}$ engendrée par les

$$\{\underline{x}^{\underline{\alpha}}\underline{T}^{\underline{k}} \colon |\underline{\alpha}| = |\underline{k}| \text{ et } |\underline{k}| \leq (N+1).p^m\}.$$

Montrons par récurrence sur n, que si $|\underline{\alpha}| = |\underline{k}| = n$, $\underline{x}^{\underline{\alpha}}\underline{T}^{\underline{k}} \in C$. On peut supposer que $n > (N+1)p^m$; dans ce cas il existe i tel que $k_i > p^m$, et $T_i^{(k_i)} = uT_i^{(k_i-p^m)}T_i^{(p^m)}$ où $u\in \mathbf{Z}^*_{(p)}$. Si $\underline{\beta}\in\mathbf{N}^{N+1}$ est tel que $|\underline{\beta}| = p^m$ avec $\forall i$, $\beta_i\leq\alpha_i$, alors

$$\underline{x}^{\underline{\alpha}}\underline{T}^{(\underline{k})} = u\underline{x}^{\underline{\beta}}T_i^{(p^m)}\underline{x}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}}\underline{T}^{(\underline{k}-p^m 1_i)},$$

qui est dans C par hypothèse de récurrence. Finalement, $\mathscr{A}$ est égale à C, ce qui achève la démonstration du (i).

De plus, observons que

$$\Gamma(X,\mathscr{A}(r)) = \oplus_{n\in\mathbf{N}}\oplus_{|\underline{\alpha}|=n+r,|\underline{k}|=n} A\cdot x_0^{\alpha_0}\cdots x_N^{\alpha_N}T_0^{(k_0)}\cdots T_N^{(k_N)}.$$

On en déduit que si $r\geq 0$, $\Gamma(X,\mathscr{A}(r))$ est engendré comme $\Gamma(X,\mathscr{A})$-module, par les éléments $\{\underline{x}^{|\underline{\alpha}|}\colon |\underline{\alpha}| = r\}$, qui sont homogènes de degré zéro. Si $r<0$, il existe une injection $\Gamma(X,\mathscr{A})$-linéaire :

$$\Gamma(X,\mathscr{A}(r)) \xrightarrow{x_0^r} \Gamma(X,\mathscr{A}).$$

Par noethérianité de $\Gamma(X,\mathscr{A})$, $\Gamma(X,\mathscr{A}(r))$ est donc un $\Gamma(X,\mathscr{A})$-module de type fini. Ce qui conclut le (ii).

2.4.2.2 Lemme. *(i) La B-algèbre $\Gamma(X,\mathscr{B}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ est une B-algèbre de type fini.*

(ii) Les modules $\mathrm{H}^n(X,\mathscr{B}^{(m)}(r)\otimes\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ sont de type fini sur $\Gamma(X,\mathscr{B}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ pour tout $r\in\mathbf{Z}$ et tout $n\in\mathbf{N}$.

(iii) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{B}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$-module cohérent, alors $\Gamma(X,\mathscr{E})$ est un module de type fini sur $\Gamma(X,\mathscr{B}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$.

(iv) L'algèbre $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}^{(m)}))$ *est une* B*-algèbre noethérienne et le module* $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet \mathscr{D}^{(m)}(r))$ *est de type fini sur cette algèbre.*

Démonstration. Notons $\mathscr{B}' = \mathscr{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{A}$ et $\mathscr{C} = B \otimes_A \mathscr{A}$. Les algèbres $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}'$ sont des $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes noethériennes. En particulier, (iii) se déduira de (ii) en arguant du fait que tout $\mathscr{B}'$-module cohérent admet une résolution par des modules du type $\mathscr{B}'(-r)$. Notons d'autre part que

$$\mathscr{C}_k \simeq B \otimes_A \mathcal{O}_X(k) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1}).$$

Comme la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_X(k) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})$ est plate sur A, il existe des isomorphismes canoniques $\Gamma(X, \mathscr{C}) \simeq B \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{A})$ et $\Gamma(X, \mathscr{C}(r)) \simeq B \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{A}(r))$. En particulier, d'après le lemme précédent, $\Gamma(X, \mathscr{C})$ est une B-algèbre de type fini et $\Gamma(X, \mathscr{C}(r))$ est un $\Gamma(X, \mathscr{C})$-module de type fini pour tout $r \in \mathbf{Z}$. En passant aux composantes homogènes dans les isomorphismes précédents, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \mathrm{H}^n(X, \mathscr{C}_k(r)) \simeq B \otimes_A \mathrm{H}^n(X, \mathcal{O}_X(k + r) \otimes \mathrm{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})).$$

En particulier, si $r \in \mathbf{Z}$ est fixé, pour tout $k \geq -r$, le module $\mathscr{C}_k(r)$ est acyclique.

Etant donné la condition (ii) de (D), il existe une surjection canonique $\mathscr{C} \to \mathscr{B}'$, qui est en fait graduée. Soit $\mathscr{I}$ le noyau de cette surjection : c'est un $\mathscr{C}$-module cohérent gradué, dont les composantes homogènes sont des $B \otimes_A \mathcal{O}_X$-modules cohérents. Nous nous trouvons donc dans une situation identique à 2.2.3.5, et on peut en déduire qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_0,\ \forall n \in \mathbf{N}, \mathrm{H}^n(X, \mathscr{I}) = \mathrm{H}^n(X, \mathscr{I}(r)) = 0.$$

D'où finalement deux suites exactes :

$$\Gamma(X, \mathscr{C}) \to \Gamma(X, \mathscr{B}') \to \mathrm{H}^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k)$$

et

$$\Gamma(X, \mathscr{C}(r)) \to \Gamma(X, \mathscr{B}'(r)) \to \mathrm{H}^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k(r)).$$

Remarquons enfin que les modules $\oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k$ et $\oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k(r)$ sont des $B \otimes_A \mathcal{O}_X$-modules cohérents, de sorte que $\mathrm{H}^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k)$ et que $\mathrm{H}^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathscr{I}_k(r))$ sont des B-modules de type fini d'après le lemme 2.4.1.2. On en déduit donc que $\Gamma(X, \mathscr{B}')$ est finie comme $\Gamma(X, \mathscr{C})$-algèbre et donc de type fini sur B puisque c'est le cas de $\Gamma(X, \mathscr{C})$ d'après le lemme précédent. En outre, le module $\Gamma(X, \mathscr{B}'(r))$ est de type fini sur $\Gamma(X, \mathscr{C})$ et donc a fortiori sur $\Gamma(X, \mathscr{B}')$. De plus, la cohomologie de $\mathscr{B}'(r)$ en degrés ≥ 1, se réduit à la cohomologie de $\oplus_{k<\rho-r}\mathscr{B}'_k(r)$; on en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, les $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{B}'(r))$ sont des A-modules de type fini. D'où le (ii).

L'assertion (iv) découle en fait de (iii). En effet, on dispose d'une surjection $\mathscr{B}' \to \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}$, qui fait de $\mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}$ un $\mathscr{B}'$-module cohérent. En particulier $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$ est un $\Gamma(X, \mathscr{B}')$-module de type fini et donc une B-algèbre de type fini. Le module $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}(r))$ est aussi de type fini sur $\Gamma(X, \mathscr{B}')$ et donc a fortiori sur $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}(r))$.

2.4.2.3 Proposition. *Soit $\mathscr{B}^{(m)}$ une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D). Alors,*

(i) L'algèbre $\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ est une A-algèbre noethérienne.

(ii) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent, $\Gamma(X, \mathscr{E})$ est un $\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$-module de type fini.

Démonstration. Montrons (i). Comme $\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ est filtrée par l'ordre des opérateurs différentiels, il suffit de montrer que $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ est noethérien. D'après 2.2.3.6, le conoyau de l'homomorphisme canonique

$$0 \to \mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)}) \xrightarrow{\lambda} \Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$$

est nul en degrés supérieurs à un certain k_0 et de type fini sur A. Notons que λ est un morphisme d'algèbres. Le module $\oplus_{k\leq k_0-1}\mathrm{gr}_k\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ est donc un B-module de type fini, engendré par $\{z_1, \ldots, z_s\}$. D'après le lemme précédent, l'algèbre $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$ est une B-algèbre de type fini. Soient $y_1, \ldots, y_t$ des générateurs homogènes de $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$, de degré respectif n_i (où $n_1 \leq \ldots \leq n_t$). Soient maintenant $l \geq \max\{k_0, n_t\}$ et C la sous-algèbre de $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ engendrée par les éléments

$$\left\{y_1^{\alpha_1} \cdots y_t^{\alpha_t} : k_0 \leq \sum n_i\alpha_i \leq 3l - 1\right\} \bigcup \{z_1, \ldots, z_s\}.$$

Montrons par récurrence sur le degré que $\mathrm{gr}_k\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)}) \subset C$. C'est vrai si $k \leq 3l - 1$. Prenons $k \geq 3l$ et supposons que ce soit vrai pour tout $k' \leq k - 1$. En degré k, les algèbres $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X, \mathscr{D}^{(m)})$ et $\Gamma(X, \mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$ coïncident, si bien que nous sommes ramenés à montrer que tout élément $\underline{y}^{\underline{\alpha}}$, avec $|\sum n_i\alpha_i| = k$, est dans C. Or, avec notre choix de l, il existe $\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}$ tel que $\sum n_i\beta_i \geq l$ et tel que $\sum n_i(\alpha_i - \beta_i) \geq l$. Alors, $\underline{y}^{\underline{\alpha}} = \underline{y}^{\underline{\beta}} \cdot \underline{y}^{\underline{\alpha}-\underline{\beta}} \in C$, par hypothèse de récurrence. Ce qui conclut (i).

Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{D}^{(m)}$-module cohérent. Alors, d'après 2.2.3.6, il existe une suite exacte $\mathscr{D}^{(m)}$-linéaire

$$0 \to \mathscr{R} \to \left(\mathscr{D}^{(m)}(-r)\right)^a \to \mathscr{E} \to 0.$$

En passant aux sections globales, on trouve une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{R}) \to \Gamma(X,(\mathscr{D}^{(m)}(-r))^a) \to \Gamma(X,\mathscr{E}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathscr{R}).$$

Comme le module $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{R})$ est un A-module de type fini d'après 2.2.3.7, cela nous ramène à montrer l'assertion (ii) pour les modules du type $\mathscr{D}^{(m)}(-r)$. Appliquons alors de nouveau (ii) de 2.2.3.6 : le conoyau de l'homomorphisme

$$0 \to \mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)}(-r)) \xrightarrow{\lambda'} \Gamma(X,\mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}(-r))$$

est encore de type fini sur A. Or, le module $\Gamma(X,\mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)}(-r))$ est de type fini sur $\Gamma(X,\mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$. Comme l'algèbre $\Gamma(X,\mathrm{gr}_\bullet\mathscr{D}^{(m)})$ est finie sur $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)})$ via λ, cela montre que $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)}(-r))$ est de type fini sur $\mathrm{gr}_\bullet\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)})$ et la proposition.

2.4.2.4 Corollaire. *Si A est complet et si $\mathscr{B}^{(m)}$ est une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D), alors :*

(i) L'algèbre $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)})$ est une A-algèbre noethérienne.

(ii) Si $\mathscr{E}$ est un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent, $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{E})$ est un $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)})$-module de type fini.

Démonstration. D'après 2.3.2, l'algèbre $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)})$ est la séparée complétée de $\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)})$. Comme cette algèbre est noethérienne, il résulte des rappels 3.2 de [6], que $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)})$ est noethérienne. Soit $\mathscr{E}$ un $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-module cohérent, alors d'après 2.3.3, il existe une suite exacte $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-linéaire

$$0 \to \mathscr{R} \to \left(\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r)\right)^a \to \mathscr{E} \to 0.$$

En passant aux sections globales, on trouve une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X,\mathscr{R}) \to \Gamma(X,(\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r))^a) \to \Gamma(X,\mathscr{E}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathscr{R}).$$

Comme le module $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{R})$ est un A-module de type fini d'après 2.3.2, cela nous ramène à montrer l'assertion (ii) pour les modules du type $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r)$. Or d'après 2.3.2, le module $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r))$ est le séparé complété de $\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)}(-r))$ qui est de type fini sur $\Gamma(X,\mathscr{D}^{(m)})$. Il en résulte que $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(-r))$ est de type fini sur $\Gamma(\mathscr{X},\hat{\mathscr{D}}^{(m)})$, d'où le (ii).

Remarques.

(i) Cet énoncé est aussi vrai pour $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}})$ et pour les modules cohérents $\mathscr{E}$ sur $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$. En effet, on peut toujours passer à un modèle entier $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-cohérent de $\mathscr{E}$ auquel on applique le résultat précédent. Il suffit alors d'utiliser le fait que les sections globales commutent à la limite inductive pour conclure.

(ii) Ce résultat de noethérianité débouche naturellement sur la question de savoir si $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}})$ est une algèbre cohérente, ce que nous ignorons. Pour trancher cette question, il faudrait savoir que $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{D}}^{(m+1)}_{\mathscr{X}\mathbf{Q}})$ est une $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}})$-algèbre plate à gauche. Cela étant, nous montrerons en 3.3.3.5 que $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^{\dagger}({}^{\dagger}\mathscr{Z})_{\mathbf{Q}})$ est une algèbre cohérente.

2.4.3 Remarque. La cohomologie des $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}$-modules cohérents n'est pas triviale sur $\mathscr{X}$. Pour voir cela, on peut par exemple s'inspirer de [11] : si tel était le cas, la cohomologie des $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}(r)$ serait triviale pour tout $r \in \mathbf{Z}$ et d'après la suite exacte $0 \to \hat{\mathscr{D}}^{(m)}(r) \xrightarrow{p^i} \hat{\mathscr{D}}^{(m)}(r) \to \mathscr{D}^{(m)}_{X_0}(r) \to 0$, cela entraînerait que la cohomologie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}(r)$ est triviale pour tout $r \in \mathbf{Z}$ et donc, que la cohomologie des $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$-modules cohérents est triviale. Or, d'après la proposition (2.2.7) de [6], l'image de $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$ dans $\mathscr{D}_{X_0}$, l'anneau des opérateurs différentiels usuels, s'identifie à $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X)$, où $X^{(m+1)}$ est le schéma déduit de X par changement de base par la puissance $m+1$-ième du Frobenius absolu de S. Il existe donc une suite exacte

$$0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{D}^{(m)}_{X_0} \to \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X) \to 0,$$

où $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$, qui est cohérent comme $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$-module, puisque $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$ est un anneau noethérien ; de même, $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X)$ est un $\mathscr{D}^{(m)}_{X_0}$-module à gauche cohérent. Notons $F^{(m+1)}$ le Frobenius relatif : $X \to X^{(m+1)}$, alors

$$\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(F^{(m+1)}_{*}\mathscr{O}_X, F^{(m+1)}_{*}\mathscr{O}_X).$$

On en déduit que $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(F^{(m+1)*}F^{(m+1)}_{*}\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$. D'après [13], le faisceau $F^{(m+1)}_{*}(\mathscr{O}_X)$ est somme directe de twists de Serre : $F^{(m+1)}_{*}(\mathscr{O}_X) = \oplus_{i=1}^{r}\mathscr{O}_X(k_i)$ où $k_i \in \mathbf{Z}$ et donc, si $l \geq \max\{k_i\} + N + 1$, le faisceau $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathscr{O}_X)(-l)$ n'est pas acyclique, d'où la remarque.

Chapitre 3

Interprétation géométrique des modules cohérents sur l'algèbre de Weyl.

Les notations sont les mêmes qu'au chapitre 2 : S est le spectre d'un anneau de valuation discrète V d'inégales caractéristiques $(0,p)$, $\mathcal{V}$ le complété de V, $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}\mathcal{V}$, $X = \mathbf{P}^N_S$, $\mathcal{X} = \hat{\mathbf{P}}^N_{\mathcal{S}}$; les coordonnées projectives sur ces trois espaces sont notées $[u_0, \ldots, u_N]$, j est l'inclusion de $D_+(u_0)$ dans X, et $\mathcal{U}_i$ l'ouvert $D_+(u_i)$ de $\mathcal{X}$. Nous étudions d'abord les coefficients algébriques $\mathcal{B}^{(m)}_X$ sur X et montrons qu'ils satisfont la condition (D) du chapitre 2. Considérons en outre la fibre générique $\mathcal{X}_K$ de $\mathcal{X}$, le morphisme de spécialisation sp de $\mathcal{X}_K$ vers $\mathcal{X}$ et les ouverts $U_i = sp^{-1}\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}_K$. Soient $\rho_m = p^{-1/p^{m+1}}$ et V_m le voisinage strict de U_0 défini sur U_i par $|x_0/x_i| \geq \rho_m$. Nous observons d'abord que V_m est un ouvert affinoïde de $\mathcal{X}_K$. Nous commençons par regarder le cas des coefficients $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ et $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$: il résulte formellement de l'équivalence de catégories démontrée par Berthelot (cf 4.4.2 de [6]) entre les $\mathcal{O}_{V_m}$-modules cohérents d'une part et les $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents d'autre part, ainsi que des théorèmes de Kiehl pour les espaces affinoïdes, que l'on dispose aussi de théorèmes analogues aux théorèmes A et B pour les $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents sur $\mathcal{X}$. On généralise ici au cas des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents sur $\mathcal{X}$ en montrant qu'il existe une équivalence de catégories entre les $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. Une partie du travail a déjà été faite au chapitre 2 avec le théorème d'acyclicité. Le reste nécessite de donner une filtration croissante de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, distincte de celle par les $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, qui permettra plus facilement de faire les calculs, et notamment d'établir les théorèmes de platitude dont nous aurons besoin.

3.1 Le cas des coefficients $\mathcal{B}^{(m)}_X$ et $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$

3.1.1 Etude de $\Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)}_X)$.

3.1.1.1 Définition. Nous renvoyons au chapitre 1 pour la définition des coefficients $\mathscr{B}_X^{(m)}$. Pour décrire leurs sections globales, nous introduisons ici l'application

$$\nu_m : \mathbf{Z} \to \mathbf{N},$$

définie comme suit. Soient $k \in \mathbf{N}$, q et r, le quotient et le reste de la division euclidienne de k par p^{m+1}:

si $r = 0$, on pose $\nu_m(k) = q$,

si $r \neq 0$, on pose $\nu_m(k) = q + 1$.

Remarquons que $\nu_m(k - p^{m+1}) = \nu_m(k) - 1$. De plus, l'application $k \to \nu_m(k)$ est croissante, et, si k est fixé, l'application $m \to \nu_m(k)$ est décroissante. En outre, $\nu_m(k)$ est le plus petit entier $q' \geq 0$ tel que $k = p^{m+1}q' - s$ avec $s \geq 0$. On en déduit en particulier l'inégalité :

$$\nu_m(k + k') \leq \nu_m(k) + \nu_m(k').$$

Si $k \in \mathbf{Z}$ et $k < 0$, on pose $\nu_m(k) = 0$. Pour tout $N \geq 1$, on étend cette définition au cas où $\underline{k}$ est un multi-indice de longueur N, en posant

$$\nu_m(\underline{k}) = \sum_{i=1}^{N} \nu_m(k_i).$$

Mentionnons enfin l'encadrement :

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(\underline{l}) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + N.$$

Notons $B_X^{(m)} = \Gamma(X, \mathscr{B}_X^{(m)})$ et $x_i = u_i/u_0$.

3.1.1.2 Lemme. *On a la description suivante de* $B_X^{(m)}$:

$$B_X^{(m)} = \left\{ \sum_{\underline{l}} a_{\underline{l}} \underline{x}^{\underline{l}} : a_{\underline{l}} \in V \text{ et } v_p(a_{\underline{l}}) \geq \nu_m(|\underline{l}|) \right\}.$$

Démonstration. Rappelons que

$$\Gamma(U_i, \mathscr{B}_X^{(m)}) = \mathcal{O}(U_i)[T] \Big/ \left(\frac{u_o}{u_i}\right)^{p^{m+1}} T - p\,.$$

L'algèbre $\Gamma(U_0, \mathscr{B}_X^{(m)})$ s'identifie à $\mathcal{O}(U_0) = V\left[\frac{u_l}{u_0}\right]_{l \neq 0}$. Il résulte d'autre part du lemme 4.3.3 de [6], que $\mathscr{B}_X^{(m)}$ se plonge dans $j_*\mathcal{O}_X$, de sorte que l'on peut identifier $\Gamma(U_i, \mathscr{B}_X^{(m)})$, pour $i \neq 0$, à :

$$V\left[\frac{u_l}{u_i}, p\left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{p^{m+1}}\right]_{l \neq i}.$$

Si $i \neq 0$, $\Gamma(U_i, \mathscr{B}_X^{(m)})$ est donc la sous-algèbre de $\mathscr{O}(U_i \cap U_0)$ engendrée par les éléments

$$p^l \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{p^{m+1}l - j_0} \prod_{k \neq 0, i} \left(\frac{u_k}{u_i}\right)^{j_k}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Comme $\nu_m(n)$ est le plus petit entier $q' \geq 0$ tel que $n = p^{m+1}q' - s$ avec $s \geq 0$, on en déduit que le V-module $\Gamma(U_i, \mathscr{B}_X^{(m)})$ est libre de base les

$$p^{\nu_m(n)} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{n} \prod_{k \neq 0, i} \left(\frac{u_k}{u_i}\right)^{j_k}.$$

Soit $s \in B_X^{(m)}$, et $s_i = s_{|U_i}$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} s_0 &= \sum a_{\underline{l}} \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{l_1} \cdots \left(\frac{u_N}{u_0}\right)^{l_N}, \\ s_{0|U_i} &= \sum a_{\underline{l}} \left(\frac{u_1}{u_i}\right)^{l_1} \cdots \left(\frac{u_N}{u_i}\right)^{l_N} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{|\underline{l}|}. \end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que s_0 se prolonge sur U_i est que $v_p(a_{\underline{l}}) \leq \nu_m(|\underline{l}|)$, condition qui ne dépend finalement pas de i. Cela montre que les éléments donnés par le lemme sont des sections globales de $\mathscr{B}_X^{(m)}$ et que ce sont les seules.

3.1.1.3 Proposition. *L'algèbre $B_X^{(m)}$ est une V-algèbre plate, de type fini. En outre, $\mathscr{B}_X^{(m)}$ est engendrée par ses sections globales, comme $\mathscr{O}_X$-module.*

En d'autres termes, nous établissons ici que $\mathscr{B}_X^{(m)}$ satisfait la condition (D) du chapitre 2. D'après le lemme, il est clair que $B_X^{(m)}$ est en fait une V-algèbre libre de base les $p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}$. Montrons que $B_X^{(m)}$ est une V-algèbre de type fini. Soit C la sous-algèbre de $B_X^{(m)}$ engendrée par

$$\left\{p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}} \colon |\underline{l}| \leq p^{m+1}\right\}.$$

Montrons par récurrence sur $|\underline{l}|$ que $p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}} \in C$. On peut supposer que $|\underline{l}| > p^{m+1}$. Alors, il existe un N-uplet de module p^{m+1}, $(l'_1, \ldots, l'_N)$, tel que : $\forall i \leq N$, $l'_i \leq l_i$. En utilisant la relation : $\nu_m(|\underline{l}|) = \nu_m(|\underline{l} - \underline{l}'|) + 1$, on a l'égalité

$$p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}} = (p\underline{x}^{\underline{l}'}) \cdot (p^{\nu_m(|\underline{l}-\underline{l}'|)}\underline{x}^{\underline{l}-\underline{l}'}),$$

qui appartient à C par hypothèse de récurrence.

Considérons enfin l'application canonique : $\lambda \colon \mathscr{O}_X \otimes_V B_X^{(m)} \to \mathscr{B}_X^{(m)}$. Il est clair que $\lambda_{|U_0}$ est surjectif. Si $i \neq 0$, $\mathscr{B}_X^{(m)}(U_i) = \mathscr{O}(U_i)[p(u_i/u_0)^{p^{m+1}}]$ est engendrée par $p(u_i/u_0)^{p^{m+1}}$ comme $\mathscr{O}(U_i)$-algèbre. Or $\lambda(1 \otimes p x_i^{p^{m+1}}) = p(u_i/u_0)^{p^{m+1}}$, donc λ est surjectif. Ceci achève la démonstration de la proposition.

3.1.2 Les coefficients $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. On ne donnera la démonstration des analogues des théorèmes A et B que dans le cas des $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. On peut obtenir les mêmes théorèmes pour les $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents de façon tout à fait analogue en utilisant le fait que l'on dispose des théorèmes A et B pour les $j^{\dagger}\mathcal{O}_{]X_0[}$-modules cohérents sur $\mathfrak{X}_K$. On observera que le théorème B peut être obtenu à partir du chapitre 2, puisque les modules $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ sont respectivement des $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Notons j_m l'inclusion de V_m dans $\mathfrak{X}_K$. Le foncteur $sp_* \circ j_{m*}$ établit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}_{V_m}$-modules cohérents et les $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Soient $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_{V_m}$-module cohérent et $\mathscr{N} = sp_* \circ j_{m*}\mathscr{M}$. Pour tout $i \geq 1$, on a l'égalité : $\Gamma(\mathscr{U}_i, \mathscr{N}) = \Gamma(U_i \bigcap V_m, \mathscr{M})$, et U_i est un ouvert affinoïde de $\mathfrak{X}_K$. On en déduit que la cohomologie de $\mathscr{N}$, qui est calculée par le complexe de Čech relatif aux $\mathscr{U}_i$, est canoniquement isomorphe à la cohomologie de $\mathscr{M}$ qui est calculée par le complexe de Čech relatif au recouvrement de V_m par les $U_i \bigcap V_m$.

3.1.2.1 Lemme. *L'ouvert V_m s'identifie à la boule fermée de K^N de centre* 0 *et de rayon $r_m = \rho_m^{-1}$.*

Démonstration. L'ouvert $U_0 \bigcap V_m$ est égal à U_0. Via les coordonnées u_k/u_i, les ouverts U_i s'identifient aux boules fermées de K^N définies par les équations : $|u_k(x)/u_i(x)| \leq 1$. Si $i \geq 1$, les ouverts $U_i \bigcap V_m$ sont définis par les inéquations :

(i) Pour tout $k \neq 0$, $\left|\dfrac{u_k}{u_i}(x)\right| \leq 1$,

(ii) $1 \leq \left|\dfrac{u_i}{u_0}(x)\right| \leq r_m$.

Notons Δ_m la boule fermée de K^N de centre 0 et de rayon r_m. Choisissons $t_1, \ldots, t_N$ des coordonnées sur Δ de sorte que $\Delta_m = \{x : \forall i, t_i(x) \leq r_m\}$. Si $i \neq 0$, notons V_i, l'ouvert affinoïde de Δ_m défini par les inéquations :

$$1 \leq |t_i(x)| \leq r_m, \text{ et } \forall j \neq i, |t_j(x)| \leq |t_i(x)|.$$

Soit $V_0 = B(0, 1^+)$ la boule unité fermée incluse dans Δ_m. Les ouverts V_i pour $i \geq 0$ forment un recouvrement affinoïde de Δ_m. On voit ainsi que l'on définit pour tout i un homomorphisme d'espaces analytiques rigides de $U_i \bigcap V_m$ vers Δ_m en envoyant t_i sur u_i/u_0. Ces morphismes se recollent de façon évidente en un homomorphisme d'espaces analytiques rigides de V_m sur Δ_m, qui est un isomorphisme puisque c'est le cas sur les U_i.

3.1.3 Théorèmes A et B pour les $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules cohérents. Notons $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)})$; du fait que $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)} = \Gamma(V_m, \mathcal{O}_{V_m})$, $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ est une algèbre affinoïde, en particulier noethérienne. Soit M un $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module de type fini, on note $\varphi(M)$ le faisceau sur $\mathcal{X}$, associé au préfaisceau $\psi(M)$ qui à $\mathcal{U}$ associe $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}(\mathcal{U}) \otimes_{\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}} M$; c'est évidemment un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent. On a alors la proposition :

3.1.3.1 Proposition. *(i) Γ et φ sont des foncteurs quasi-inverses qui définissent une équivalence de catégories entre les $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules cohérents et les $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules de type fini.*

(ii) Si $\mathcal{N}$ est un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent, alors $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}, \mathcal{N}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration. Rappelons que sur V_m qui est affinoïde, on dispose des théorèmes A et B (cf 9.4.3 de [10]) dus à Kiehl. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{V_m}$-module cohérent tel que $sp_* \circ j_{m*}\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$. D'après la remarque préliminaire, la cohomologie de $\mathcal{M}$ sur V_m, qui est triviale, est canoniquement isomorphe à la cohomologie de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{X}$, qui est donc elle aussi triviale, ce qui nous donne le (ii). Notons φ', le foncteur analogue à φ pour les $\Gamma(V_m, \mathcal{O}_{V_m})$-modules de type fini, qui est un faisceau associé à un préfaisceau ψ'. Le théorème A pour les espaces affinoïdes implique que φ' et Γ définissent une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}_{V_m}$-modules cohérents et les $\Gamma(V_m, \mathcal{O}_{V_m})$-modules de type fini et que $\psi'(M)$ est en fait un faisceau pour tout $\Gamma(V_m, \mathcal{O}_{V_m})$-module de type fini M. Par définition, si $\mathcal{V}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, on a l'égalité : $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{N}) = \Gamma(sp^{-1}(\mathcal{V}), \mathcal{M})$. Comme $\psi'(\mathcal{M})$ est un faisceau rigide, cela montre a fortiori que pour tout i, $\psi(\mathcal{N})_{|\mathcal{U}_i}$ est un faisceau pour la topologie de Zariski, dont les sections sur $\mathcal{U}_i$ sont les mêmes que celles de $\varphi' \circ \Gamma(V_m, \mathcal{M})$ sur U_i. On en déduit les isomorphismes $\varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \simeq sp_* j_{m*}\varphi' \circ \Gamma(V_m, \mathcal{M}) \simeq sp_* j_{m*}\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$.

Soit maintenant N un $\hat{B}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module de type fini; notons M le module N qu'on regarde comme $\Gamma(V_m, \mathcal{O}_{V_m})$-module de type fini. Le même raisonnement que précédemment montre que le préfaisceau $\psi(N)_{|\mathcal{U}_i}$ est un faisceau, de sorte que $\varphi(N)$ coïncide avec $sp_* \circ j_{m*}\varphi'(M)$. Finalement, le module $\Gamma(\mathcal{X}, \varphi(N))$ est isomorphe à $\Gamma(V_m, \varphi'(M))$, qui est lui-même isomorphe à N, d'où la proposition.

3.1.3.2 Corollaire. *Soit $\mathcal{M}$ un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent. Alors $\mathcal{M}$ admet une résolution par des $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-modules libres.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, soient $\mathcal{N}$ un $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent et $\mathcal{M}$ un $j_{m*}\mathcal{O}_{V_m}$-module cohérent, tel que $sp_* \circ j_{m*}\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Comme V_m est un ouvert affinoïde, il existe une surjection $\mathcal{O}_{V_m}$-linéaire $\mathcal{O}_{V_m}^a \to \mathcal{M}$. Comme le foncteur Γ est exact sur V_m, on en déduit une surjection $\hat{B}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$-linéaire

$$(\hat{B}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}})^a \to \Gamma(V_m, \mathcal{M}),$$

qu'on peut voir comme une surjection $\hat{B}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$-linéaire $(\hat{B}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}})^a \to \Gamma(X, \mathcal{N})$, et qui correspond, via l'équivalence de catégories décrite ci-dessus à une surjection $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$-linéaire

$$(\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}})^a \to \mathcal{N}.$$

D'où le corollaire.

3.2 Interprétation géométrique de l'algèbre de Weyl.

3.2.1 Une filtration de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. On se place d'abord sur X et on introduit les notations $x_i = u_i/u_0$, $U_i = D_+(u_i)$. Les opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} = \underline{\partial}_{\underline{x}}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$, $\partial_r^{\langle k_r\rangle_{(m)}} = \partial_{x_r}^{\langle k_r\rangle_{(m)}}$, $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}_{\underline{x}}^{[\underline{k}]}$ sont donc définis sur U_0. De plus, du fait de l'inclusion $\mathcal{D}^{(m)}_X \hookrightarrow j_*\mathcal{D}^{(m)}_{U_0}$, on a une inclusion $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X) \hookrightarrow \Gamma(U_0, \mathcal{D}^{(m)}_X)$.

3.2.1.1 Lemme. *(i) Pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} \in \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$,*

(ii) Pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \in \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$.

Démonstration. Observons d'abord que les opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ et $\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \in \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ préservent $\mathcal{O}(U_i)$ pour tout i. Pour montrer cela, il suffit de le vérifier pour les opérateurs $\partial_r^{\langle k_r\rangle_{(m)}}$ et $\partial_r^{[k_r]}$. Fixons i et introduisons $x'_k = u_k/u_i$ les coordonnées sur U_i. Tout élément $\mathcal{O}(U_i)$ s'écrit comme somme de monômes

$$\underline{x}'^{\underline{l}} = x_0'^{l_0} \cdots x_{i-1}'^{l_{i-1}} \cdot x_{i+1}'^{l_{i+1}} \cdots x_N'^{l_N}.$$

Finalement, nous sommes ramenés à vérifier que $\partial_r^{\langle k_r\rangle_{(m)}}.\underline{x}'^{\underline{l}} \in \mathcal{O}(U_i)$ et que $\partial_r^{[k_r]} \cdot \underline{x}'^{\underline{l}} \in \mathcal{O}(U_i)$. Sur $U_i \bigcap U_0$, on a l'égalité :

$$\underline{x}'^{\underline{l}} = x_1^{l_1} \cdots x_{i-1}^{l_{i-1}} \cdot x_i^{-|\underline{l}|} \cdot x_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots x_N^{l_N}.$$

On en déduit les formules :

$$\begin{aligned}
\text{si } r = i,\ \partial_r^{\langle k_r\rangle_{(m)}} \cdot \underline{x}'^{\underline{l}} &= (-1)^{k_r} q_{k_r}! \binom{|\underline{l}| + k_r - 1}{|\underline{l}| - 1} x_1^{l_1} \cdots x_{i_1}^{l_{i-1}} \cdot x_i^{-|\underline{l}|-k_r} \cdot x_{i+1}^{l_{i+1}} \cdots x_N^{l_N} \\
&= (-1)^{k_r} q_{k_r}! \binom{|\underline{l}| + k_r - 1}{|\underline{l}| - 1} x_0'^{l_0+k_r} \cdot x_1'^{l_1} \cdots x_N'^{l_N} \in \mathcal{O}(U_i), \\
\text{si } r \neq i,\ \partial_r^{\langle k_r\rangle_{(m)}} \cdot \underline{x}'^{\underline{l}} &= q_{k_r}! \binom{l_r}{k_r} x_1^{l_1} \cdot x_i^{-|\underline{l}|} \cdots x_r^{l_r-k_r} \cdots x_N^{k_N} \\
&= q_{k_r}! \binom{l_r}{k_r} x_0'^{l_0+k_r} \cdot x_1'^{l_1} \cdots x_r'^{l_r-k_r} \cdots x_N'^{l_N} \in \mathcal{O}(U_i).
\end{aligned}$$

Les formules pour les opérateurs $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$ sont tout à fait analogues et montrent que les fonctions de $\mathcal{O}(U_i)$ sont stables par $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ et par $\underline{\partial}^{[\underline{k}]}$.

Montrons maintenant que les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ sont des sections globales de $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Ces éléments s'écrivent comme produit des $\partial_r^{\langle k_r \rangle_{(m)}}$ avec $k_r \leq p^m$. Il nous suffit donc de vérifier que les opérateurs $\partial_r^{\langle k_r \rangle_{(m)}}$ avec $k_r \leq p^m$ sont des sections globales. Si $k_r \leq p^m$, sur $U_0 \bigcap U_i$, il existe des fonctions $b_{\underline{l}} \in \mathcal{O}(U_i \bigcap U_0)$ telles que

$$\partial_r^{\langle k_r \rangle_{(m)}} = \partial_r^{[k_r]} = \sum_{|\underline{l}| \leq k_r} b_{\underline{l}} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{l}]}.$$

Considérons $I = \{\underline{l} \colon \exists c_{\underline{l}} \in \mathcal{O}(U_i) \text{ tel que } b_{\underline{l}} = c_{\underline{l}|U_i \cap U_0}\}$ et J l'ensemble complémentaire. Posons

$$P = \partial_r^{[k_r]} - \sum_{|\underline{l}| \in I} b_{\underline{l}} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{l}]}.$$

L'opérateur P a la propriété de préserver les fonctions de $\mathcal{O}(U_i)$. Si J est non vide, on peut prendre $\underline{l}' \in J$ tel que $|\underline{l}'|$ soit minimal dans J. Alors, si $\underline{l} \in J$ et $\underline{l} \neq \underline{l}'$, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $l_s > l'_s$. Donc, si $\underline{l} \in J$ et si $\underline{l} \neq \underline{l}'$, $\underline{\partial}_{x'}^{[\underline{l}]} \cdot \underline{x}'^{\underline{l}'} = 0$. Et finalement, on a la formule :

$$\begin{aligned} P \cdot \underline{x}'^{\underline{l}'} &= b_{\underline{l}'} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{l}']}(\underline{x}'^{\underline{l}}) \in \mathcal{O}(U_i) \\ &= b_{\underline{l}'}. \end{aligned}$$

Cela contredit que J soit non vide et montre donc que les coefficients $b_{\underline{l}}$ proviennent en fait de fonctions de $\mathcal{O}(U_i)$. En vertu de l'injection $\mathcal{D}^{(m)}(U_i) \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)}(U_i \bigcap U_0)$, cela montre que $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ se prolonge d'une unique façon en une section sur U_i et en une section globale de $\mathcal{D}_X^{(m)}$. C'est donc aussi le cas de tous les opérateurs $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$. La fin de l'argument pour $\mathcal{D}_X$ est identique à ce que nous venons de faire pour $\mathcal{D}^{(m)}$, à ceci près qu'il n'y a pas lieu de restreindre le degré des opérateurs pour voir qu'ils s'étendent sur X.

3.2.2 Filtration par les $\mathcal{E}^{(m)}$. Considérons sur X, le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules : $\mathcal{E}^{(m)} = \oplus_{\underline{k}} \mathcal{B}_X^{(m)} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ qui est un sous-faisceau de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ d'après le lemme précédent, via une application λ_m. On introduit aussi $\hat{\mathcal{E}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathcal{E}^{(m)}/p^i \mathcal{E}^{(m)}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}}^{(m)}$.

3.2.2.1 Lemme. *Le faisceau $\mathcal{E}^{(m)}$ est un sous-faisceau d'anneaux filtré de $\mathcal{B}_X^{(m)} \otimes \mathcal{D}_X^{(m)}$, qui est noethérien.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathscr{E}^{(m)}$ est un sous-faisceau d'anneaux de $\mathscr{B}_X^{(m)} \otimes \mathscr{D}_X^{(m)}$, ce qu'il suffit de vérifier localement sur chaque U_i. Du fait que $\mathscr{B}_X^{(m)}$ se plonge dans $j_* \mathscr{B}_{U_0}^{(m)}$, on a des inclusions : $\mathscr{E}^{(m)}(U_i) \hookrightarrow \mathscr{E}^{(m)}(U_0 \bigcap U_i)$, pour tout i. Prenons $b \in \mathscr{B}^{(m)}(U_i)$. Par linéarité, il suffit de montrer que pour tous $\underline{k}$, $\underline{k}' \in \mathbf{N}^N$, $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} b \, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} \in \mathscr{E}^{(m)}(U_i)$. Sur $U_i \bigcap U_0$, la formule de Leibnitz donne :

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} b \, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}' \rangle_{(m)}} = \sum_{\underline{t}' + \underline{t}'' = \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{t}' \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{t}'' + \underline{k}' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle \underline{t}' \rangle_{(m)}}(b) \underline{\partial}^{\langle \underline{k}' + \underline{t}'' \rangle_{(m)}}.$$

Comme l'élément $\underline{\partial}^{\langle \underline{t}' \rangle_{(m)}}$ appartient à $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{(m)})$, $\underline{\partial}^{\langle \underline{t}' \rangle_{(m)}}(b) \in \mathscr{B}_X^{(m)}(U_i)$ et $\mathscr{E}^{(m)}$ est un anneau. L'anneau $\mathscr{E}^{(m)}$ est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs induite par celle de $\mathscr{D}_X^{(m)}$. Le gradué de $\mathscr{E}^{(m)}$ pour cette filtration est la $\mathscr{B}_X^{(m)}$-algèbre commutative engendrée par les opérateurs $\partial_r^{\langle p^i \rangle_{(m)}}$, pour $1 \leq r \leq N$ et $0 \leq i \leq m$. On en déduit que $\mathscr{E}^{(m)}$ est noethérien.

3.2.2.2 Proposition. *Il existe un isomorphisme d'anneaux canonique :*

$$\mathscr{E}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \simeq \mathscr{D}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty).$$

Démonstration. Le module $\mathscr{E}^{(m)}$ est le $\mathscr{B}_X^{(m)}$-module libre de base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ et se plonge dans $\mathscr{D}_X^{(m)}(\infty)$ via une application λ_m. On en déduit une inclusion des complétés $\hat{\mathscr{E}}^{(m)} \hookrightarrow \hat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(\infty)$, et une inclusion $\lambda \colon \mathscr{E}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \hookrightarrow \mathscr{D}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ en passant à la limite inductive sur m.

Construisons maintenant une rétraction de λ. Plaçons-nous sur l'ouvert U_i, muni des coordonnées $x'_k = u_k/u_i$. Sur U_i, on considère les deux $\mathcal{O}_{U_i}$-modules libres :

$$\mathscr{M} = \oplus_{|\underline{k}| \leq p^m} \mathcal{O}_{U_i} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$$

et

$$\mathscr{N} = \oplus_{|\underline{k}| \leq p^m} \mathcal{O}_{U_i} \underline{\partial}_{x'}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

L'application λ induit une injection $\mu \colon \mathscr{M} \hookrightarrow \mathscr{N}$ qui est définie par une matrice A à coefficients dans $\mathcal{O}(U_i)$. En restriction à U_0, μ est un isomorphisme si bien que $\det A \in \mathcal{O}(U_i)$ et que $(\det A)^{-1} \in \mathcal{O}(U_i \bigcap U_0)$. Il existe donc $m' \geq m$ tel que $p(\det A)^{-1} \in \mathscr{B}^{(m')}(U_i)$. Finalement, cela montre que, pour tout $\underline{k}$ tel que $|\underline{k}| \leq p^m$, $p\underline{\partial}_{x'}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \in \oplus_{\underline{k}} \mathscr{B}^{(m')}(U_i) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$. Remarquons que le faisceau $\oplus_{\underline{k}} \mathscr{B}_X^{(m')} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ est un sous-anneau de $\mathscr{E}^{(m')}$ par le même raisonnement qu'au lemme précédent. Finalement, en procédant comme au 1.6.4, on voit qu'il existe $m_1 \geq m'$ et $c \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout opérateur

P de $\mathcal{D}^{(m)}(U_i)$, $p^c P \in \mathcal{E}^{(m_1)}(U_i)$. En procédant de même pour tous les U_i, on peut choisir $m_1 \geq m$, tel qu'il existe une inclusion $\beta' \colon p^c\mathcal{D}_X^{(m)} \hookrightarrow \mathcal{E}^{(m_1)}$ telle que la composée $\beta' \circ \lambda_m$ soit égale à p^c fois l'inclusion de $\mathcal{E}^{(m)}$ dans $\mathcal{E}^{(m_1)}$. Par passage aux complétés β' induit une application $\hat{\beta}'$; si l'on pose maintenant $\beta = p^{-c}\hat{\beta}'$ et que l'on prend la limite inductive de toutes ces applications β, on trouve une application γ qui est une rétraction de λ, ce qui montre que λ est surjective.

Introduisons maintenant la complétée faible de l'algèbre de Weyl :

$$A_N(K)^\dagger = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}, \text{ où } a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \text{ et } \exists C > 0,\ \eta < 1 \colon |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|} \right\}.$$

3.2.3 Théorème. *Le morphisme de restriction*

$$r \colon \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \to \Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$$

induit un isomorphisme canonique d'anneaux

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \simeq A_N(K)^\dagger.$$

Démonstration. Du fait de l'inclusion $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \hookrightarrow j_*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, le morphisme r est en fait injectif. On rappelle (cf 2.4.4 de [6]) que

$$\Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) = \left\{ \begin{array}{lll} \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}, \text{ où } a_{\underline{l},\underline{k}} \in K & \text{et} & \exists C > 0,\ \eta < 1 \colon |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{|\underline{k}|} \\ & \text{et} & |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p \to 0 \text{ si } |\underline{l}| \to \infty. \end{array} \right\}$$

Le schéma $\mathcal{X}$ étant noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive de sorte que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) = \varinjlim_m \Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}})$. Or on a les égalités : $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}) = \Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}}^{(m)}) \otimes K$ et $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}}^{(m)}) = \varprojlim_i \Gamma(X_i, \mathcal{E}_i^{(m)})$ par passage à la limite projective. Le module $\mathcal{E}_i^{(m)}$ est un $\mathcal{B}_i^{(m)}$-module libre de base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$. En passant de nouveau à la limite inductive, on voit que : $\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i^{(m)}) = \oplus_{\underline{k}} \Gamma(X_i, \mathcal{B}_i^{(m)}) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$. Comme le faisceau $\mathcal{B}_X^{(m)}$ est sans p-torsion, il existe une suite exacte : $0 \to \mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow{p^i} \mathcal{E}^{(m)} \to \mathcal{E}_i^{(m)} \to 0$. Le faisceau $\mathcal{E}^{(m)}$ étant somme directe de $\mathcal{B}_X^{(m)}$-modules libres, il est cohomologiquement trivial sur X, puisque c'est aussi le cas de $\mathcal{B}_X^{(m)}$, d'après un résultat de Berthelot (cf l'appendice de [14]). Par passage à la longue suite exacte de cohomologie de la suite exacte précédente, on en déduit que les $\mathcal{E}_i^{(m)}$ sont aussi acycliques sur X et surtout que $\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i^{(m)}) = \Gamma(X, \mathcal{E}^{(m)})/p^i$, pour tout i. Finalement, le module $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}}^{(m)})$ est le séparé complété de $\Gamma(X, \mathcal{E}^{(m)})$. Soit $|.|_{sp}$, la norme spectrale sur l'algèbre affinoïde

$\hat{B}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$. Il résulte de ces observations l'identité :

$$\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}) = \left\{ \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} \text{ où } a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \text{ et } v_p(a_{\underline{l},\underline{k}}) - \nu_m(|\underline{l}|) \to +\infty \text{ si } |\underline{k}| + |\underline{l}| \to +\infty \right\}$$

Soit maintenant $P \in \Gamma(\mathscr{U}_0, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, tel que P s'écrive $P = \sum_{\underline{l},\underline{k}} b_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$; étant donné la relation : $q^{(m)}_{\underline{k}}!\, \underline{\partial}^{[\underline{k}]} = \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$, P est dans $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}})$ si et seulement si

$$v_p(b_{\underline{l},\underline{k}}) - v_p(q^{(m)}_{\underline{k}}!) - \nu_m(|\underline{l}|) \to +\infty \text{ si } \quad |\underline{k}| + |\underline{l}| \to \infty.$$

Des encadrements 1.2.1, on déduit :

$$\frac{|\underline{l}| + |\underline{k}|}{p^{m+1}} + \frac{|\underline{k}|}{p^{m+1}(p-1)} - N \log_p(|\underline{k}|+1) - N\frac{p}{p-1} \leq v_p(q^{(m)}_{\underline{k}}!) + \nu_m(|\underline{l}|) \leq \frac{|\underline{l}| + |\underline{k}|}{p^m(p-1)} + 1.$$

Il existe donc une constante D indépendante de $\underline{k}$ et de $\underline{l}$ et une constante D', indépendante de $\underline{k}$, de $\underline{l}$ et de m, telles que l'ait l'encadrement suivant :

$$\frac{|\underline{l}| + |\underline{k}|}{p^{m+1}} + D \leq v_p(q^{(m)}_{k}!) + \nu_m(|\underline{l}|) \leq \frac{|\underline{l}| + |\underline{k}|}{p^m(p-1)} + D'.$$

La minoration implique que $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}})$ est inclus dans $A_N(K)^{\dagger}$, via l'application r.

Réciproquement, soit $P \in A_N(K)^{\dagger}$ tel que P s'écrive

$$P = \sum_{\underline{l},\underline{k}} b_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \text{ où } |b_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}.$$

Pour tout triplet $(\underline{l}, \underline{k}, m)$, la quantité $v_p(b_{\underline{l},\underline{k}}) - v_p(q^{(m)}_{k}!) - \nu_m(|\underline{l}|)$ est minorée par

$$\big(-\log_p(\eta) - 1/p^m(p-1)\big)\,(|\underline{l}| + |\underline{k}|) + D'',$$

où D'' est une constante indépendante de $\underline{k}$, $\underline{l}$ et de m. Choisissons m tel que $-\log_p \eta > 1/p^m(p-1)$, alors $P \in \Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathbf{Q}})$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

3.3 Modules cohérents sur l'algèbre de Weyl.

En vue de l'équivalence de catégories entre les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents, il nous faut encore montrer essentiellement que $A_N(K)^{\dagger}$ est bien une algèbre cohérente (résultat annoncé indépendamment par Mebkhout [18]) et surtout que le faisceau $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est plat à droite et à gauche sur $A_N(K)^{\dagger}$. En réalité, grâce à 4.3.10 de [6], il suffit d'établir que $\Gamma(\mathscr{U}_0, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ est un $A_N(K)^{\dagger}$-module plat à droite et à gauche pour obtenir ce résultat. Nous suivons alors la même démarche que Berthelot dans 4.3.5 de [6], les problèmes apparaissant étant surtout techniques. Nous emploierons la filtration de $A_N(K)^\dagger$ qui est donnée par les $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$, mais, pour des raisons pratiques, nous ne prendrons pas $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}^{(m)})$ comme modèle entier, mais considérerons le complété $\hat{C}^{(m)}$ d'un $B_X^{(m)}$-module libre noté $C^{(m)}$.

3.3.1 Description d'un modèle entier de $\hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$. Soit $C^{(m)}$ le sous-V-module libre de $\Gamma(\mathscr{U}_0, \mathscr{D}_X^{(m)})$ de base les $p^{\nu_m(\underline{l})}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$. On introduit $\hat{C}^{(m)}$ son complété p-adique.

3.3.1.1 Lemme. *Le sous-module $C^{(m)}$ est une sous-V-algèbre de $\Gamma(X, \mathscr{E}^{(m)})$ telle que l'on a un isomorphisme canonique : $\hat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \simeq \Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$.*

Démonstration. L'inclusion de $C^{(m)}$ dans $\Gamma(X, \mathscr{E}^{(m)})$ provient de l'inégalité : $\nu_m(\underline{l}) \geq \nu_m(|\underline{l}|)$, conséquence des propriétés vues en 3.1.1.1. Pour voir que $C^{(m)}$ est un sous-anneau de $\Gamma(X, \mathscr{E}^{(m)})$, il suffit d'établir que

$$p^{\nu_m(\underline{l})}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} \cdot p^{\nu_m(\underline{l}')}\underline{x}^{\underline{l}'}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}} \in C^{(m)}.$$

Mais le produit $\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}} \cdot \underline{x}^{\underline{l}'}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}'\rangle_{(m)}}$ est dans $\Gamma(U_0, \mathscr{B}_X^{(m)})$, de sorte que l'assertion résulte encore de ce que $\nu_m(\underline{l}) + \nu_m(\underline{l}') \geq \nu_m(\underline{l} + \underline{l}')$.

L'inclusion de $C^{(m)}$ dans $\Gamma(X, \mathscr{E}^{(m)})$ induit une inclusion entre les complétés p-adiques $\hat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \hookrightarrow \Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$. On renvoie à 3.2.3 pour une description de $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$. Comme le V-module $C^{(m)}$ est libre, on dispose de la description suivante de $\hat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$:

$$\hat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\,\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle_{(m)}}, \text{ où } a_{\underline{l},\underline{k}} \in K & \text{et} \quad v_p(\underline{l},\underline{k}) - \nu_m(\underline{l}) \to +\infty \text{ si } |\underline{l}| \to +\infty \\ & \text{et} \quad |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p \to 0 \text{ si } |\underline{l}| + |\underline{k}| \to +\infty. \end{array} \right\}$$

Rappelons de plus les inégalités :

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(\underline{l}) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + N$$

et

$$\frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} \leq \nu_m(|\underline{l}|) \leq \frac{|\underline{l}|}{p^{m+1}} + 1.$$

On en tire que $|\nu_m(|\underline{l}|) - \nu_m(\underline{l})| \leq N$, ce qui montre que $\hat{C}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ est isomorphe à $\Gamma(\mathscr{X}, \hat{\mathscr{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$.

3.3.2 Propriétés de finitude. Introduisons encore :

$$C''^{(m)} = \Gamma(U_0, \mathscr{D}_X^{(m)}) = \{\oplus_{\underline{l},\underline{k}} V\, \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}\}$$

et

$$C'^{(m)} = \{\oplus_{\underline{l},\underline{k}} V\, p^{\nu_{m+1}(\underline{l})} \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}\},$$

et fixons désormais m. On notera alors $C = C^{(m)}$, $C_1 = C'^{(m)}$ et $C_2 = C''^{(m)}$. Pour $i \in \{0, \dots, N\}$, on pose :

$$D_1^i = \{\oplus_{\underline{l},\underline{k}} V\, p^{\nu_{m+1}(l_1,\dots,l_i)+\nu_m(l_{i+1},\dots,l_N)} \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}\}$$
$$D_2^i = \{\oplus_{\underline{l},\underline{k}} V\, p^{\nu_m(l_{i+1},\dots,l_N)} \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}\}$$

Comme en 3.3.1.1, on montre que les D_ε^i sont des sous-anneaux et on en déduit le lemme suivant.

3.3.2.1 Lemme. *Pour $\varepsilon \in \{1, 2\}$, on a une suite croissante de C-algèbres :*

$$C = D_\varepsilon^0 \subset D_\varepsilon^1 \subset \dots \subset D_\varepsilon^{N-1} \subset C_\varepsilon.$$

Introduisons maintenant :

$$T_{m,1}^i = \{\oplus_{\underline{l}} V \cdot p^{\nu_{m+1}(l_1,\dots,l_i)+\nu_m(l_{i+1},\dots,l_N)} \underline{x}^{\underline{l}}\} \quad \text{et} \quad T_{m,2}^i = \{\oplus_{\underline{l}} V \cdot p^{\nu_m(l_{i+1},\dots,l_N)} \underline{x}^{\underline{l}}\}.$$

3.3.2.2 Lemme. *(i) Les V-algèbres $T_{m,1}^i$ et $T_{m,2}^i$ sont noethériennes.*

(ii) Les algèbres $C^{(m)}$ et $C'^{(m)}$ sont noethériennes à gauche et à droite.

(iii) Pour tout $\varepsilon \in 1, 2$ et tout $i \in \{1, \dots, N\}$, l'algèbre D_ε^i est noethérienne à droite et à gauche. En outre l'algèbre graduée pour la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels $\mathrm{gr}_\bullet(D_\varepsilon^i / pD_\varepsilon^i)$, est une algèbre commutative noethérienne.

Démonstration. Par définition, on a l'égalité : $\nu_m(\underline{k}) = \sum_{i=1}^N \nu_m(k_i)$, de sorte que $T_{m,1}^i = \otimes_1^i B_{X_1}^{(m+1)} \otimes_{i+1}^N B_{X_1}^{(m)}$, avec $X_1 = \mathbf{P}_S^1$. Comme l'algèbre $B_{X_1}^{(m)}$ est une V-algèbre de type fini, c'est aussi le cas de $T_{m,1}^i$ qui est donc noethérienne. La démonstration est analogue pour $\varepsilon = 2$.

L'assertion (ii) est un cas particulier de (iii). Pour montrer (iii), introduisons le gradué de D_ε^i pour la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels. Alors, l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet D_\varepsilon^i$ est une $T_{m,\varepsilon}^i$-algèbre engendrée par les classes dans le gradué des $\partial_r^{\langle k_r \rangle_{(m)}}$, pour $r \in \{1, \dots, N\}$ et $1 \leq k_r \leq p^m$ d'après 2.2.5 de [6]. Modulo p, on trouve naturellement les mêmes générateurs. On en déduit que D_ε^i est noethérienne.

3.3.3 Lemmes de platitude.

3.3.3.1 Proposition. *(i) L'algèbre* $\hat{C}'^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ *est plate à droite et à gauche sur* $\hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$.

(ii) L'algèbre $\hat{C}''^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ *est plate à droite et à gauche sur* $\hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$.

Démonstration. Compte tenu de la filtration par les D^i_ε, introduite en 3.3.2.1, il suffit de montrer que $\hat{D}^i_{\varepsilon,\mathbf{Q}}$ est plat à droite et à gauche sur $\hat{D}^{i-1}_{\varepsilon,\mathbf{Q}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Fixons désormais i, pour $\varepsilon \in \{1,2\}$, on introduit :

$$A^i_\varepsilon = \hat{D}^{i-1}_\varepsilon + D^i_\varepsilon.$$

Remarquons que A^i_ε est un anneau : il suffit pour cela de vérifier que $\hat{D}^{i-1}_\varepsilon \cdot D^i_\varepsilon \subset A^i_\varepsilon$ et que $D^i_\varepsilon \cdot \hat{D}^{i-1}_\varepsilon \subset A^i_\varepsilon$. Soient $(Q, R) \in \hat{D}^{i-1}_\varepsilon \times D^i_\varepsilon$. Il existe un entier s tel que $p^s R \in D^{i-1}_\varepsilon$. De plus, il existe $(T, S) \in D^{i-1}_\varepsilon \times \hat{D}^{i-1}_\varepsilon$ tels que $Q = T + p^s S$; donc on a l'égalité : $Q \cdot R = T.R + p^s S \cdot R \in A^i_\varepsilon$. De même, $R \cdot Q$ est dans A^i_ε.

Il existe un morphisme canonique : $\varphi\colon D^i_\varepsilon/p^k D^i_\varepsilon \to A^i_\varepsilon/p^k A^i_\varepsilon$. Vérifions que φ est surjectif. Si $P = Q + R$, avec $Q \in \hat{D}^{i-1}_\varepsilon$ et $R \in D^i_\varepsilon$, Q s'écrit $U + p^k V$, où $U \in D^{i-1}_\varepsilon$ et $V \in \hat{D}^{i-1}_\varepsilon$. Finalement, la classe de Q dans A^i_ε est égale à $\varphi(\bar{R} + \bar{U})$ puisque $p^k \hat{D}^{i-1}_\varepsilon \subset p^k A^i_\varepsilon$. De plus, soit $P \in D^i_\varepsilon$, tel que $\varphi(P) \in p^k A^i_\varepsilon$. Décomposons P en $P = p^k(T + R)$ où $(T, R) \in \hat{D}^{i-1}_\varepsilon \times D^i_\varepsilon$. Pour $\varepsilon = 2$, introduisons $r_{\underline{l},\underline{k}}$, et $p_{\underline{l},\underline{k}}$ les coefficients de R et de P respectivement dans la base des $p^{\nu_{m+1}(l_1,\ldots,l_i)+\nu_m(l_{i+1},\ldots,l_N)}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}$. Ecrivons

$$T = \sum_{\underline{l},\underline{k}} t_{\underline{l},\underline{k}} p^{\nu_{m+1}(l_1,\ldots,l_{i-1})+\nu_m(l_i,\ldots,l_N)}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}.$$

Comme $P = p^k(T + R)$, la famille des $t_{\underline{l},\underline{k}}$ est presque nulle et $T \in D^i_\varepsilon$, donc $P \in p^k D^i_\varepsilon$. La démonstration est identique pour $\varepsilon = 1$.

Finalement, il existe un isomorphisme entre les complétés p-adiques : $\hat{D}^i_\varepsilon \simeq \hat{A}^i_\varepsilon$. De plus, si $P \in D^i_\varepsilon$, il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $p^s P \in \hat{D}^{i-1}_\varepsilon$. Cela nous dit que $\hat{D}^{i-1}_{\varepsilon,\mathbf{Q}} = A^i_{\varepsilon,\mathbf{Q}}$. Pour montrer que $\hat{D}^i_{\varepsilon,\mathbf{Q}} = \hat{A}^i_{\varepsilon,\mathbf{Q}}$ est plat sur $\hat{D}^{i-1}_{\varepsilon,\mathbf{Q}} = A^i_{\varepsilon,\mathbf{Q}}$, il suffit donc de montrer que A^i_ε est noethérien, d'après les théorèmes généraux sur les complétés des anneaux non commutatifs noethériens mentionnés en 3.2 de [6] ; cela va résulter des deux sous-sections qui suivent.

Introduisons les filtrations suivantes sur A^i_ε :

Pour $\varepsilon = 1$, $\mathrm{F}^s_1 = \sum_{l \leq s} p^{\nu_{m+1}(l)} x_i^l \, \hat{D}^{i-1}_1$, pour tout $s \in \mathbf{N}$, pour $\varepsilon = 2$, $\mathrm{F}_2^s = \sum_{l \leq s} x_i^l \hat{D}_2^{i-1}$.

3.3.3.2 Lemme. *Pour tout $\varepsilon \in \{1,2\}$ et pour tout entier s, F_ε^s est un $\hat{D}_\varepsilon^{i-1}$-module à gauche.*

Démonstration. Traitons par exemple le cas où $\varepsilon = 1$. Nous avons alors la relation :

$$\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}} p^{\nu_{m+1}(l)} x_i^l = p^{\nu_{m+1}(l)} \sum_{\underline{t}'+\underline{t}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{t}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle\underline{t}'\rangle_{(m)}}(x_i^l) \underline{\partial}^{\langle\underline{t}''\rangle_{(m)}}.$$

On en déduit que $\underline{\partial}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}(\mathrm{F}_1^s) \subset \mathrm{F}_1^s$ et donc que $D_1^{i-1} \cdot \mathrm{F}_1^s \subset \mathrm{F}_1^s$. Or F_1^s est p-adiquement complet car c'est un module à droite de type fini sur $\hat{D}_1^{i-1}$ qui est un anneau noethérien complet d'après 3.3.2.2; par passage aux complétés, on voit que $\hat{D}_1^{i-1} \cdot F_1^s \subset F_1^s$. On procède de façon analogue si $\varepsilon = 2$.

3.3.3.3 Corollaire. *Pour tout $\varepsilon \in \{1,2\}$, l'anneau A_ε^i est un anneau noethérien.*

Démonstration. Comme F_ε^s est un $\hat{D}_\varepsilon^{i-1}$-module à gauche, on a l'inclusion suivante : $\mathrm{F}_\varepsilon^s \cdot \mathrm{F}_\varepsilon^t \subset \mathrm{F}_\varepsilon^{s+t}$. De plus, F_ε^0 est égal à $\hat{D}_\varepsilon^{i-1}$ et $\bigcup_s \mathrm{F}_\varepsilon^s$ à A_ε^i. Remarquons encore que : $p \cdot p^{\nu_{m+1}(s)} x_i^s = p^{\nu_{m+1}(s)} x_i^{s-1}(px_i) \in \mathrm{F}_1^{s-1}$ et que $px_i^s = x_i^{s-1}(px_i) \in \mathrm{F}_2^{s-1}$. Finalement, pour tout $\varepsilon \in \{1,2\}$ et tout $s \geq 0$, les modules $\mathrm{gr}_F^{s+1}(A_\varepsilon^i)$ sont annulés par p. Considérons la suite exacte :

$$0 \to p\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i) \to \mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i) \to \mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)/p\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i) \to 0.$$

L'idéal $p\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)$ s'identifie à $\hat{D}_\varepsilon^{i-1}$ et la structure de $\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)$-module est induite par la structure de $\hat{D}_\varepsilon^{i-1}$-module de $\hat{D}_\varepsilon^i$. En particulier, comme $\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)$-module à gauche et à droite, $p\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)$ est noethérien.

Il existe en outre un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i)/p\mathrm{gr}_F^\bullet(A_\varepsilon^i) \simeq \hat{D}_\varepsilon^{i-1}/p \oplus \bigoplus_{s \geq 0} \mathrm{F}_\varepsilon^{s+1}/\mathrm{F}_\varepsilon^s.$$

Notons B cet anneau. On dispose sur B d'une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels. Nous l'expliciterons pour $\varepsilon = 2$; pour $\varepsilon = 1$, il suffira de remplacer x_i^s par $p^{\nu_{m+1}(s)} x_i^s$ dans les formules. On dispose d'une application

$$\begin{array}{rccc} \lambda_s : & D_1^{i-1}/pD_1^{i-1} & \to & F_1^s/F_1^{s-1} \\ & \bar{R} & \mapsto & \overline{x_i^s R}. \end{array}$$

Cette application est surjective. En effet, soit $P \in F_1^s$, il existe $Q \in \hat{D}_1^{i-1}$ tel que, modulo F_1^{s-1}, P soit égal à $x_i^{s+1}Q$. Or, il existe $(T, R) \in \hat{D}_1^{i-1} \times D_1^{i-1}$, tel que $Q = R+pT$. Modulo F_1^{s-1}, P est donc égal à $x_i^s R$. D'où la surjectivité de λ_s. Notons Fil_t la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels sur $D_1^{i-1}/p\,D_1^{i-1}$. Posons $G_1^{s,t} = \lambda_s(\mathrm{Fil}_t(D_1^{i-1}/p\,D_1^{i-1})$ et introduisons la filtration analogue $G_\varepsilon^{s,t}$ sur $\mathrm{F}_\varepsilon^s/\mathrm{F}_\varepsilon^{s-1}$, pour $\varepsilon = 2$.

Ces filtrations $G_\varepsilon^{s,t}$ sont exhaustives, croissantes et $G_\varepsilon^{s,t} \cdot G_\varepsilon^{s,t'} \subset G_\varepsilon^{s,t+t'}$. On pose enfin

$$G_\varepsilon^t = \bigoplus_{s \in \mathbf{N}} G_\varepsilon^{s,t},$$

qui est croissante, exhaustive, et telle que $G_\varepsilon^{t'} \cdot G_\varepsilon^{t''} \subset G_\varepsilon^{t'+t''}$. Il ne reste finalement plus qu'à montrer le lemme suivant pour conclure.

Lemme. *Pour $\varepsilon \in \{1, 2\}$, l'algèbre $\mathrm{gr}_G(\mathrm{gr}_F A_\varepsilon^i)$ est noethérienne.*

Démontrons ce lemme. Posons $\Delta_\varepsilon^i = \mathrm{gr}_G^\bullet \mathrm{gr}_F^\bullet A_\varepsilon^i$; c'est une $A_\varepsilon'^i$-algèbre commutative où $A_\varepsilon'^i = \mathrm{gr}_G\,(D_\varepsilon^{i-1}/pD_\varepsilon^{i-1})$ est une algèbre noethérienne d'après 3.3.2.2. En effet, soient $(P, Q) \in G_\varepsilon^{s,t} \times G_\varepsilon^{s',t'}$. Il existe $(R, S) \in D_\varepsilon^{i-1} \times D_\varepsilon^{i-1}$, tels que $P = x_i^s R$ et $Q = x_i^{s'} S$. De plus, $\bar{R}$ et $\bar{S}$ sont des opérateurs d'ordre t et t' respectivement dans $D_\varepsilon^{i-1}/pD_\varepsilon^{i-1}$. Alors, $PQ - QP = x_i^{s+s'}(RS - SR) \bmod \mathrm{F}_\varepsilon^{s+s'-1}$. L'opérateur $RS - SR$ est d'ordre $t + t' - 1$, donc $[P, Q] = 0$ dans Δ_ε^i, ce qui montre que Δ_ε^i est commutative. En outre, Δ_ε^i est bigraduée car

$$\Delta_\varepsilon^i = \oplus \mathrm{gr}_G^\bullet(D_\varepsilon^{i-1}/pD_\varepsilon^{i-1}) \bigoplus_{s,t} G_\varepsilon^{s,t}/G_\varepsilon^{s,t-1}.$$

Soit maintenant $f \in A_\varepsilon^i$, tel que $f \in F_\varepsilon^s$; sa classe modulo $\mathrm{F}_\varepsilon^{s-1}$, puis modulo $G_\varepsilon^{s,t-1}$ sera notée $(f)_{s,t}$.

Fixons $\varepsilon = 1$, et soit Λ la sous-$A_\varepsilon''^i$-algèbre de Δ_ε^i engendrée par les éléments :

$$\{(px_i)_{1,0}, \ldots, (px_i^{p^{m+2}})_{p^{m+2},0}\}.$$

Tout élément de $G_\varepsilon^{s,t}$ s'écrit $(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0}\,R$, où $R \in A_\varepsilon''^i$. Pour montrer que Δ_ε^i coïncide avec Λ, il suffit donc de voir que $(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0} \in \Lambda$, ce qu'on peut voir par récurrence sur S, étant donné la formule :

$$(p^{\nu_{m+1}(s)}x_i^s)_{s,0} = (p^{\nu_{m+1}(s-p^{m+2})}x_i^{s-p^{m+2}})_{s-p^{m+2},0} \cdot (px^{p^{m+2}})_{p^{m+2},0}.$$

De même, l'algèbre Δ_2^i est la $A_2''^i$-algèbre engendrée par $(x_i)_{1,0}$.

La conclusion est donc que, pour $\varepsilon \in \{1, 2\}$, Δ_ε^i est une $A_\varepsilon''^i$-algèbre de type fini, donc noethérienne. Par suite, l'algèbre $\mathrm{gr}_F(A_\varepsilon^i)$ est noethérienne, ainsi que A_ε^i, ce qui achève la démonstration du lemme de platitude.

3.3.3.4 Lemme. *L'algèbre $\hat{C}^{(m+1)}_{\mathbf{Q}}$ est plate à droite et à gauche sur $\hat{C}'^{(m)}_{\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. On procède comme pour la démonstration du théorème 3.5.3 de [6]. Introduisons le sous-anneau de $\hat{C}^{(m+1)}$, $R^{(m)} = \hat{C}'^{(m)} + C^{(m+1)}$; soit $P \in C^{(m+1)}$, il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $p^s P$ soit dans $\hat{C}^{(m)}$, de sorte que $R^{(m)}$ est un anneau. En outre, tout élément de $\hat{C}'^{(m)}$ s'écrit d'une unique façon :

$$P = \sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}} p^{\nu_{m+1}(|\underline{l}|)} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}.$$

On montre alors, comme dans 3.5.3 de [6], que les complétés $\hat{R}^{(m)}$ et $\hat{C}^{(m+1)}$ sont isomorphes. De plus, on voit facilement que les localisés $\hat{R}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ et $\hat{C}'^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ sont isomorphes, ce qui nous ramène à montrer que $R^{(m)}$ est noethérien à droite et à gauche. On se contentera de montrer que $R^{(m)}$ est noethérien à gauche. La remarque décisive de la démonstration du théorème 3.5.3 de [6] est aussi valable dans le cas des coefficients de $T_i^{(m+1)}$. En effet, pour tout $b \in T_i^{(m+1)}$, on a dans $C^{(m+1)}$:

$$\left[\partial_j^{[p^{m+1}]}, b\right] = \sum_{i<p^{m+1}} \binom{p^{m+1}}{i} \partial_j^{[p^{m+1}-i]}(b) \otimes \partial_j^{[i]}.$$

En outre, d'après 2.2.5 de [6], $R^{(m)}$ est engendré comme $C'^{(m)}$-module par les éléments

$$\left(\partial_1^{[p^{m+1}]}\right)^k, \ldots, \left(\partial_N^{[p^{m+1}]}\right)^k.$$

Ajoutons que si $P \in \hat{C}'^{(m)}$, on a la relation :

$$\left[\left(\partial_j^{[p^{m+1}]}\right)^k, P\right] \in \sum_{i<k} \hat{C}'^{(m)} \cdot \left(\partial_j^{[p^{m+1}]}\right)^i.$$

Le reste de la démonstration est alors tout à fait identique à la fin de celle du théorème 3.5.3 de [6].

3.3.3.5 Corollaire. *(i) L'algèbre $\hat{C}^{(m+1)}_{\mathbf{Q}}$ est plate à droite et à gauche sur $\hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$.*

(ii) L'algèbre $A_N(K)^\dagger$ est une K-algèbre cohérente.

Démonstration. L'assertion (i) découle de 3.3.3 et de 3.3.3.4. D'autre part $A_N(K)^\dagger = \varinjlim_m \hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$, où les $\hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ sont des algèbres noethériennes d'après 3.3.2.2. Le passage de (i) à (ii) est alors standard.

3.3.3.6 Corollaire. *(i) L'algèbre $\Gamma(\mathcal{U}_0, \hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(\infty))$ est une $\hat{C}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-algèbre plate à droite et à gauche.*

(ii) *L'algèbre* $\Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ *est une* $A_N(K)^{\dagger}$*-algèbre plate à droite et à gauche.*

(iii) *Pour tout ouvert affine* $\mathcal{V}$ *de* $\mathcal{X}$*,* $\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ *est une* $A_N(K)^{\dagger}$*-algèbre plate à droite et à gauche.*

Démonstration. L'assertion (i) a déjà été montrée en 3.3.3 et (ii) en résulte par passage à la limite inductive. D'après 4.3.11 de [6], l'application

$$\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{U}_0 \bigcap \mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$$

est fidèlement plate. De plus, d'après 3.3.4 de [6], le morphisme : $\Gamma(\mathcal{U}_0, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{U}_0 \bigcap \mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ est plat à droite et à gauche. On en déduit finalement que le morphisme $A_N(K)^{\dagger} \to \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ est plat à droite et à gauche.

3.3.4 Equivalence de catégories.

3.3.4.1 Proposition. *(i) Sur* $\mathcal{X}$*, tout* $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$*-module cohérent admet une résolution par des* $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$*-modules libres.*

(ii) Tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$*-module cohérent admet une résolution par des* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$*-modules libres.*

Démonstration. Montrons (i) : il suffit de voir que tout $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}$ s'écrit comme quotient d'un $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module libre. D'après 2.3.5, il existe une surjection $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-linéaire :

$$\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(-r)^a \to \mathcal{M}.$$

L'homomorphisme canonique $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(-r) \xrightarrow{u_0^r} \hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ est un isomorphisme sur $D_+(u_0)$, donc un isomorphisme sur $\mathcal{X}$, et induit un isomorphisme

$$\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(-r) \simeq \hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}.$$

Le raisonnement est analogue si $r \geq 0$ et cela montre (i). Montrons (ii) : là encore, il suffit de montrer que tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent $\mathcal{M}$ est quotient d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module libre. Or, d'après 3.6.2 de [6], il existe un $m \in \mathbf{N}$ et un $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent tel que $\mathcal{N}$ soit isomorphe à

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\hat{\mathcal{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}} \mathcal{N}.$$

D'après (i), il existe une surjection $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$-linéaire $(\hat{\mathscr{B}}^{(m)}\hat{\otimes}\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}})^a \rightarrow \mathscr{N}$. En tensorisant par $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, on obtient une surjection $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)^a \rightarrow \mathscr{M}$$

comme cherchée, d'où la proposition.

3.3.4.2 Corollaire. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, alors $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M})$ est un $A_N(K)^{\dagger}$-module cohérent.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\mathscr{M}$ admet une résolution par des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres de type fini : $\mathscr{L}_{\bullet}$. Comme Γ est exact sur les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents d'après 2.3.5, cela donne une résolution de $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M})$ par des $A_N(K)^{\dagger}$-modules libres. D'où l'assertion.

3.3.4.3 Foncteur φ. Soit M un $A_N(K)^{\dagger}$-module. On note $\psi(M)$ le préfaisceau sur $\mathscr{X}$ qui à un ouvert $\mathscr{U}$ associe $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathscr{U}) \otimes_{A_N(K)^{\dagger}} M$. On note $\varphi(M)$ le faisceau sur $\mathscr{X}$ associé à ce préfaisceau ψ. Il est immédiat que si M est un module cohérent, $\varphi(M)$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent.

3.3.4.4 Théorème. *(i) Les foncteurs φ et Γ sont exacts et induisent une équivalence de catégories entre les $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents.*

(ii) Les foncteurs φ et $\mathbf{R}\Gamma$ *induisent une équivalence de catégories entre $D^-_{coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ et $D^-_{coh}(A_N(K)^{\dagger})$.*

Démonstration. Montrons d'abord (i). L'exactitude de Γ provient de 2.3.5. Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent et M un $A_N(K)^{\dagger}$-module cohérent. Il existe des homomorphismes canoniques $\mu : M \rightarrow \Gamma \circ \varphi(M)$ et $\lambda : \varphi \circ \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M}) \rightarrow \mathscr{M}$. Soit $\mathscr{L}_{\bullet}$ une résolution de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres de type fini. Alors, le complexe $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}_{\bullet})$ est une résolution libre de $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M})$. Pour tout ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$, le $A_N(K)^{\dagger}$-module $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathscr{U})$ est plat à droite et à gauche d'après 3.3.3.6, de sorte que l'on a un complexe exact de préfaisceaux : $\psi \circ \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}_{\bullet}) \rightarrow \psi \circ \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M}) \rightarrow 0$. En passant aux faisceaux associés, on voit que l'on obtient un complexe exact de faisceaux, d'où l'on déduit un diagramme commutatif de résolutions

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi \circ \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{L}_{\bullet}) & \rightarrow & \varphi \circ \Gamma(\mathscr{X},\mathscr{M}) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow \lambda' & & \downarrow \lambda & & \\
\mathscr{L}_{\bullet} & \rightarrow & \mathscr{M} & \rightarrow & 0.
\end{array}$$

Comme λ' est un isomorphisme de complexes, on en déduit que λ est un isomorphisme.

Réciproquement : soit M un $A_N(K)^\dagger$-module cohérent. Il existe un homomorphisme canonique $\mu\colon M \to \Gamma(\mathcal{X}, \varphi(M))$. Prenons une résolution libre $L_\bullet$ de M. Comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathcal{U})$ est plat comme $A_N(K)^\dagger$-module, il existe un complexe exact de préfaisceaux $\psi(L_\bullet) \to \psi(M) \to 0$; d'où en passant aux faisceaux associés un complexe exact $\varphi(L_\bullet) \to \varphi(M) \to 0$. Par exactitude de Γ, on en déduit un diagramme commutatif de résolutions :

$$\begin{array}{ccccc} L_\bullet & \to & M & \to & 0 \\ \downarrow \mu' & & \downarrow \mu & & \\ \Gamma(\mathcal{X}, \varphi(L_\bullet)) & \to & \Gamma(\mathcal{X}, \varphi(M)) & \to & 0 \end{array}$$

Comme μ' est un isomorphisme, on en déduit que μ est un isomorphisme. On a montré au passage que φ est exact. D'où le (i).

Comme Γ et φ préservent la cohérence, on en déduit des morphismes λ et μ des morphismes dans les catégories dérivées $M \to \mathbf{R}\Gamma \circ \varphi(M)$ et $\varphi \circ \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \to \mathcal{M}$, pour $M \in D^-_{coh}(A_N(K)^\dagger)$ et $\mathcal{M} \in D^-_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Par dévissage, il suffit alors de montrer que ce sont des isomorphismes dans le cas de modules cohérents placés en degré zéro M et $\mathcal{M}$, ce qui nous ramène au (i) et achève la démonstration du théorème.

Chapitre 4

Transformation de Fourier des $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules.

Nous commençons dans ce chapitre par donner une construction d'une désingularisation du crochet de dualité. Cela nous permet de construire le transformation de Fourier géométrique proprement dite $\mathscr{F}$ qui à un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent associe un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-module si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux espaces projectifs duaux. Le théorème de comparaison avec la transformation de Fourier naïve est basé sur un calcul explicite pour $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. La principale difficulté technique consiste à montrer que le complexe qui calcule $\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ est acyclique en degrés strictement négatifs, ce qui repose sur un lemme de division. Ceci implique à la fois le théorème de comparaison dans le cas d'un module cohérent quelconque ainsi que le fait que $\mathscr{F}$ préserve la cohérence.

Le théorème de comparaison avec la transformation de Fourier à support compact $\mathscr{F}_!$ repose aussi sur un calcul de $\mathscr{F}_!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, calcul qui nécessite le théorème de dualité globale (cf 5.6.2 de [19].)

4.1 Désingularisation du crochet de dualité.

4.1.1 Désingularisation sur Z. Soient $S = \mathrm{Spec}\mathbf{Z}$, $X = \mathbf{P}^N_S$, $Y = \mathbf{P}^N_S$ deux espaces projectifs duaux dont les coordonnées projectives sont $[u_0, \ldots, u_N]$ et $[v_0, \ldots, v_N]$. On identifie les ouverts $U_0 = D_+(u_0)$ et $V_0 = D_+(v_0)$ à deux espaces duaux dont les coordonnées sont $x_i = u_i/u_0$ et $y_i = v_i/v_0$ respectivement et $Z = X \times Y$. Les ouverts $D_+(u_i)$ et $D_+(v_i)$ seront notés U_i et V_i ; l'ouvert $U_i \times V_j$ sera noté $W_{i,j}$ tandis que W servira à désigner l'ouvert $W_{0,0}$.

Considérons l'espace projectif de dimension 1, $T = \mathbf{P}^1_S$, muni des coordonnées $[u, v]$. Soit U l'ouvert $D_+(u)$ qu'on identifie à l'espace affine de dimension 1 et dont on note la coordonnée $t = v/u$. On dispose du crochet de dualité :

$$\begin{array}{rrcl} <,>: & W & \rightarrow & U \\ & \sum_{i=1}^N x_i y_i & \leftarrow & t. \end{array}$$

4.1.1.1 Proposition. *Il existe un Z-schéma $\tilde{Z}$, obtenu par éclatements à partir de Z, tel que, si l'on note $\xi : \tilde{Z} \to Z$:*

(i) L'application ξ induit un isomorphisme $\xi^{-1}(W) \simeq W$ (on identifie alors W et $\xi^{-1}(W)$).

(ii) Le schéma $\tilde{Z}$ est projectif et lisse sur S.

(iii) Il existe un morphisme λ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\lambda} & T \\ \cup & & \cup \\ W & \xrightarrow{<,>} & U. \end{array}$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas $N = 1$, qui est le plus simple. En dehors de $0 \times \infty$ et de $\infty \times 0$, λ se prolonge. En effet, c'est évident sur W. Sur $W_{1,1}$, on définit un tel prolongement par : $(u/v) \mapsto (u_0/u_1)(v_0/v_1)$. Soit $\tilde{Z}$ l'éclaté de Z le long du sous-schéma $0 \times \infty \bigcup \infty \times 0$. Comme ce sous-schéma est lisse, $\tilde{Z}$ est lisse sur S. De plus, sur $W_{0,1}$, $\tilde{Z}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^1_{W_{0,1}}$ défini par l'équation

$$\frac{u_1}{u_0}s'' = \frac{v_0}{v_1}t'',$$

où $[s'', t'']$ sont les coordonnés projectives relatives sur $\mathbf{P}^1_{W_{0,1}}$.

Sur $W_{1,0}$, $\tilde{Z}$ est le sous-schéma de $\mathbf{P}^1_{W_{1,0}}$ défini par l'équation

$$\frac{v_1}{v_0}s' = \frac{u_0}{u_1}t',$$

où $[s', t']$ sont les coordonnées relatives sur $\mathbf{P}^1_{W_{1,0}}$. On prolonge λ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \text{sur } W_{0,1} \times D_+(s'') & : & \dfrac{v}{u} \mapsto \dfrac{u_1}{u_0}\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{t''}{s''}, \\ \text{sur } W_{0,1} \times D_+(t'') & : & \dfrac{u}{v} \mapsto \dfrac{s''}{t''}, \\ \text{sur } W_{0,1} \times D_+(s') & : & \dfrac{v}{u} \mapsto \dfrac{t'}{s'}, \\ \text{sur } W_{0,1} \times D_+(t') & : & \dfrac{u}{v} \mapsto \dfrac{s'}{t'}. \end{array}$$

Il est clair que ce prolongement convient.

En général, le sous-schéma d'équations $\sum_{i=1}^N u_i v_i = 0$ et $u_0 v_0 = 0$ n'est pas lisse, ce qui nous oblige à procéder différemment. Soit D_1 le sous-schéma de Z d'équations locales sur $W_{k,l}$ $((k,l) \in (N^*)^2)$: $(u_0/u_k) = 0$, $(v_0/v_l) = 0$ et $h = \sum_{i=1}^N (u_i/u_k)(v_i/v_l) = 0$.

4.1.1.2 Lemme. *D_1 est lisse sur S.*

Démonstration. Calculons la matrice jacobienne des équations du diviseur en fonction des coordonnées (u_i/u_k) et (v_i/v_l) :

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & \frac{u_0}{u_k} & \frac{u_1}{u_k} & \dots & \frac{u_l}{u_k} & \dots & \frac{u_N}{u_k} & \frac{v_0}{v_l} & \frac{v_1}{v_l} & \dots & \frac{v_k}{v_l} & \dots & \frac{v_N}{v_l} \\
\partial\left(\frac{u_0}{u_k}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\partial\left(\frac{v_0}{v_l}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\partial(h) & 0 & \frac{v_1}{v_l} & \dots & 1 & \dots & \frac{v_N}{v_l} & 0 & \frac{u_1}{u_k} & \dots & 1 & \dots & \frac{u_N}{u_k}.
\end{array}$$

Si $k \neq l$, cette matrice est de rang 3. Si $k = l$, $h = 1 + \sum_{i\neq k}(u_i/u_k)(v_i/v_k)$ et en un point de D_1, il existe $i \notin \{0, k\}$ tel que $(u_i/u_k)(v_i/v_l) \neq 0$ et la matrice considérée est aussi de rang 3. Le critère jacobien implique que D_1 est lisse.

Soit Z_1 le schéma éclaté de Z le long de D_1 ; d'après le lemme, Z_1 est lisse au-dessus de S ; notons $[w_0, w_1, w_2]$ les coordonnées projectives relatives de $\mathbf{P}^2_{W_{k,l}}$ au-dessus de $W_{k,l}$. Au-dessus de $W_{k,l}$, Z_1 est le sous-schéma de $\mathbf{P}^2_{W_{k,l}}$ défini par les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_0 h & = & w_2(u_0/u_k) \\ w_0(v_0/v_l) & = & w_1(u_0/u_k) \\ w_1 h & = & w_2(v_0/v_l). \end{array}\right.$$

Soient $k', h' \in \{1, \dots, N\}$, on pose $h' = h(u_k/u_{k'})(v_l/v_{l'})$. Au dessus de $W_{k',l'}$ le schéma Z_1 est défini par les équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w'_0 h' & = & w'_2(u_0/u_{k'}) \\ w'_0(v_0/v_{l'}) & = & w'_1(u_0/u_{k'}) \\ w'_1 h' & = & w'_2(v_0/v_{l'}), \end{array}\right.$$

où bien sûr, $[w'_0, w'_1, w'_2]$ sont les coordonnées projectives relatives. L'isomorphisme de recollement au-dessus de $W_{k,l} \bigcap W_{k',l'}$ est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_0 & = & w'_0(u_{k'}/u_k) \\ w_1 & = & w'_1(v_{l'}/v_l) \\ w_2 & = & w'_2(u_{k'}/u_k)(v_{l'}/v_l). \end{array}\right.$$

En particulier, le sous-schéma D_2 de Z_1 défini au-dessus de $W_{k,l}$ par les équations :

sur $D_+(w_0)$: $(w_2/w_0) = 0$ et $(u_0/u_k) = 0$,

sur $D_+(w_1)$: $(w_2/w_1) = 0$ et $(v_0/v_l) = 0$, est globalement défini sur Z_1.

4.1.1.3 Lemme. *Le sous-schéma D_2 est lisse au-dessus de S.*

Au-dessus de $W_{k,l}$, dans $\mathbf{P}^2_{W_{k,l}} \cap D_+(w_0)$, le sous-schéma D_2 est défini par les équations

$$h = 0,\ (v_0/v_l) = 0,\ (w_1/w_0)h = 0,\ (w_2/w_0) = 0 \text{ et } (u_0/u_k) = 0,$$

soit encore :

$$h = 0,\ (v_0/v_l) = 0,\ (u_0/u_k) = 0 \text{ et } (w_2/w_0) = 0.$$

Au-dessus de $W_{k,l}$, dans $\mathbf{P}^2_{W_{k,l}} \cap D_+(w_1)$, le schéma D_2 est défini par les équations :

$$(u_0/u_k) = 0,\ (v_0/v_l) = 0,\ (w_2/w_1) = 0 \text{ et } h = 0.$$

Il résulte alors d'un calcul analogue à celui du lemme précédent que D_2 est lisse.

Soit maintenant Z_2 l'éclatement de Z_1 le long du sous-schéma D_2. Soient $V_0' = D_+(w_0) \cap Z_1$ et $V_1' = D_+(w_1) \cap Z_1$, $[s_0, t_0]$ et $[s_1, t_1]$ les coordonnées projectives relatives de $\mathbf{P}^2_{V_0'}$ et de $\mathbf{P}^2_{V_1'}$. Dans $\mathbf{P}^2_{V_0'}$, Z_2 est défini par l'équation :

$$(u_o/u_k)s_0 = (w_2/w_0)t_0.$$

Dans $\mathbf{P}^2_{V_1'}$, Z_2 est défini par l'équation :

$$(v_0/v_l)s_1 = (w_2/w_1)t_1.$$

Les isomorphismes de recollement au-dessus de $V_0' \cap V_1'$ sont donnés par :

$$s_0 = (w_1/w_0)s_1 \text{ et } t_0 = (w_0/w_1)t_1.$$

On considère maintenant D_3 le sous-schéma de Z_2 réunion de deux sous-schémas disjoints définis par les équations :

$$\text{sur } D_+(w_0) \cap D_+(t_0) : (s_0/t_0) = (w_1/w_0) = 0,$$

$$\text{sur } D_+(w_1) \cap D_+(t_1) : (s_1/t_1) = (w_0/w_1) = 0.$$

4.1.1.4 Lemme. *Le sous-schéma D_3 est lisse sur S.*

Démonstration. Au-dessus de V_0', D_3 est défini par : $(w_2/w_0) = 0$ et $(w_1/w_0) = 0$, qui est lisse au-dessus de V_0' et donc au-dessus de S. Au-dessus de V_1', D_3 est défini par : $(w_2/w_1) = 0$ et $(w_0/w_1) = 0$, qui est aussi lisse au-dessus de V_1' et donc au-dessus de S.

Soient Z_3 l'éclaté de Z_2 au-dessus de D_3, $W_0' = Z_2 \bigcap D_+(w_0)$, $W_1' = Z_2 \bigcap D_+(w_1)$, $[\sigma_0, \tau_0]$ les coordonnées projectives relatives de $\mathbf{P}^2_{W_0'}$ et $[\sigma_1, \tau_1]$ les coordonnées projectives relatives de $\mathbf{P}^2_{W_1'}$. D'après le lemme précédent, Z_3 est lisse au-dessus de S. Dans $\mathbf{P}^2_{W_0'}$, Z_3 sera noté T_0 et Z_3 est défini par l'équation :

$$\tau_0(w_1/w_0) = \sigma_0(s_0/t_0).$$

Dans $\mathbf{P}^2_{W_1'}$, Z_3 sera noté T_1 et est défini par l'équation :

$$\tau_1(w_0/w_1) = \sigma_1(s_1/t_1).$$

Bien entendu, Z_3 est isomorphe à Z_2 sur $W_0' \bigcap W_1'$.

Explicitons maintenant le prolongement du crochet de dualité. Nous résumons la situation dans le tableau ci-dessous. Entre parenthèses, à côté des schémas intervevant, nous indiquerons les équations qui les caractérisent (sans préciser dans quoi).

$$\begin{array}{lcccccc}
Z_3 & : & T_0\,(\frac{w_1}{w_0}\tau_0 = \frac{s_0}{t_0}\sigma_0) & \bigcup & T_1\,(\frac{w_0}{w_1}\tau_1 = \frac{s_1}{t_1}\sigma_1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
Z_2 & : & W_0'\,(\frac{u_0}{u_k}s_0 = \frac{w_2}{w_0}t_0) & \bigcup & W_1'\,(\frac{v_0}{v_l}s_1 = \frac{w_2}{w_1}t_1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
Z_1 & : & V_0' & \bigcup & V_1' & \bigcup & D_+(w_2)\bigcap Z_1 \begin{pmatrix} w_0 h = w_2\frac{u_0}{u_k} \\ w_0\frac{v_0}{v_l} = w_1\frac{u_0}{u_k} \\ w_1 h = w_2\frac{v_0}{v_l} \end{pmatrix} \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & W_{k,l}. & & &
\end{array}$$

Vérifions d'abord que les morphismes canoniques $f_i : Z_i \to Z$ identifient $f_i^{-1}(W)$ à W. Pour cela, il suffit de vérifier qu'on éclate toujours en dehors de l'ouvert W. Il est évident que D_1 et D_2 sont disjoints de cet ouvert. Pour $D_3 \bigcap D_+(w_0) \bigcap D_+(t_0)$, cela résulte de ce que si $(s_0/t_0) = (w_1/w_0) = 0$, alors $(v_0/v_l) = (w_1/w_0)(u_0/u_k) = 0$. Pour $D_3 \bigcap D_+(w_1) \bigcap D_+(t_1)$, si (s_1/t_1) et (w_0/w_1) sont nuls, alors (u_0/u_k) est nul. Finalement D_3 est disjoint de l'ouvert $f_2^{-1}(W)$ et f_3 induit un isomorphisme : $f_3^{-1}(W) \simeq W$.

Supposons maintenant construits des prolongements $\lambda_{k,l}$ de $<,>$ sur tout $W_{k,l}$. Par construction, les applications $\lambda_{k,l}$ et $\lambda_{k',l'}$ coïncident sur W. Comme le schéma Z_3 est intègre et que $\mathbf{P}^1_S$ est séparé, les applications $\lambda_{k,l}$ et $\lambda_{k',l'}$ coïncident sur $f_3^{-1}(W_{k,l} \bigcap W_{k',l'})$. On peut donc se contenter d'expliciter un prolongement λ de $<,>$ sur les $W_{k,l}$.

Notons $h_0 = \sum_{i=1}^N (u_i/u_0)(v_i/v_0) \in \mathcal{O}_Z(W)$. On rappelle que $<,>$ correspond du point de vue des coordonnées à $(v/u) \mapsto h_0$. On pose :

sur $D_+(w_2)$: $(u/v) \mapsto (w_0/w_2)(v_0/v_l)$,

sur $D_+(w_0)$,

sur $D_+(s_0)$: $(u/v) \mapsto (t_0/s_0)(w_1/w_0)$,

sur $D_+(t_0)$,

sur $D_+(\tau_0)$: $(u/v) \mapsto (\sigma_0/\tau_0)$,

sur $D_+(\sigma_0)$: $(v/u) \mapsto (\tau_0/\sigma_0)$,

sur $D_+(w_1)$,

sur $D_+(s_1)$: $(u/v) \mapsto (t_1/s_1)(w_0/w_1)$,

sur $D_+(t_1)$,

sur $D_+(\tau_1)$: $(u/v) \mapsto (\sigma_1/\tau_1)$,

sur $D_+(\sigma_1)$: $(v/u) \mapsto (\tau_1/\sigma_1)$.

On vérifie facilement que λ convient.

4.1.2 Désingularisation du crochet de dualité dans le cas formel. On se place maintenant sur $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}V$, où V est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$ et d'uniformisante π. Les hypothèses sont les mêmes que celles de la sous-section précédente, en considérant cette fois deux espaces projectifs formels duaux de dimension N. Nous reprendrons en particulier les mêmes notations que précédemment, les schémas formels étant notés avec une lettre cursive, au lieu de droite.

4.1.2.1 Proposition. *Il existe un $\mathscr{S}$-schéma formel $\tilde{\mathfrak{X}}$, projectif et lisse sur $\mathscr{S}$, muni d'un morphisme $f : \tilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$, tel que :*

(i) f induit un isomorphisme : $f^{-1}(\mathscr{W}) \simeq \mathscr{W}$,

(ii) il existe $\lambda : \tilde{\mathfrak{X}} \to \mathscr{T}$, qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}} & \to & \mathscr{T} \\ \cup & & \cup \\ \mathscr{W} & \overset{<,>}{\to} & \mathscr{U}_0. \end{array}$$

Démonstration. Par changement de base à partir de 4.1.1.1, on déduit des schémas $\tilde{Z}_i = \tilde{Z} \times_S \mathrm{Spec}(V/\pi^i V)$ projectifs et lisses sur $\mathrm{Spec}(V/\pi^i V)$, tels qu'il existe un prolongement λ_i du crochet de dualité. On pose alors : $\tilde{\mathscr{Z}} = \varinjlim_i \tilde{Z}_i$, et $\lambda = \varinjlim_i \lambda_i$, qui conviennent.

4.2 Transformation de Fourier géométrique.

Soient $\pi \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ une racine de l'équation $\pi^{p-1} = -p$, $K = \mathbf{Q}_p[\pi]$, V l'anneau des entiers de K. C'est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π et d'indice de ramification $p-1$. Notons $S = \mathrm{Spec} V$, $\mathscr{X} = \hat{\mathbf{P}}^N_V$ et $\mathscr{Y} = \hat{\mathbf{P}}^N_V$ deux espaces projectifs duaux, et $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Les coordonnées projectives sur $\mathscr{X}$ et sur $\mathscr{Y}$ seront respectivement notées $[u_0, \ldots, u_N]$ et $[v_0, \ldots, v_N]$. Pour $1 \leq i \leq N$, on introduit en outre $x_i = u_i/u_0$ et $y_i = v_i/v_0$. On identifie par ce choix de coordonnées les ouverts $\mathscr{U}_0 = D_+(u_0)$ et $\mathscr{V}_0 = D_+(v_0)$ à l'espace affine formel $\hat{\mathbf{A}}^N_V$ et à l'espace affine dual. Notons encore $\mathscr{U}_i = D_+(u_i)$, $\mathscr{V}_j = D_+(v_j)$ et $\mathscr{W} = \mathscr{U}_0 \times \mathscr{V}_0 \hookrightarrow \mathscr{Z}$.

Soit $\mathscr{T} = \hat{\mathbf{P}}^1_V$ où les coordonnées projectives sont $[u, v]$. On identifie l'ouvert $\mathscr{U} = D_+(u)$ à $\hat{\mathbf{A}}^1_V$ en choisissant $t = v/u$ comme coordonnée sur $\mathscr{U}$. Soit T, U, la réduction de la situation modulo p et D le diviseur complémentaire de $T \backslash U$. On dispose de l'isocristal de Dwork L_π, qui est surconvergent sur T le long de D , et dont la connexion est définie sur $\mathscr{U}$ par $\nabla(f) = df/dt - \pi f$. D'après 4.1.2.1, on dispose en outre de l'éclatement $\tilde{\mathscr{Z}}$ et d'un morphisme $f : \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{Z}$ qui induit un isomorphisme $f^{-1}(\mathscr{W}) \simeq \mathscr{W}$. De plus, $\tilde{\mathscr{Z}} \backslash \mathscr{W}$ est un diviseur de $\tilde{\mathscr{Z}}$ et il existe un prolongement du crochet de dualité $\lambda : \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{T}$.

Sur $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$, $\tilde{\mathscr{Z}}$ et $\mathscr{T}$, on introduit les faisceaux d'opérateurs différentiels à singularités surconvergentes le long des diviseurs d'équation respective : $u_0 = 0$ sur $\mathscr{X}$, $v_0 = 0$ sur $\mathscr{Y}$, $u_0 v_0 = 0$ sur $\mathscr{Z}$ et sur $\tilde{\mathscr{Z}}$, $u = 0$ sur $\mathscr{T}$. Tous ces diviseurs seront notés avec un ∞. On rappelle que f_+ et $f^!$ induisent une équivalence de catégories entre les $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $\mathscr{D}^\dagger_{\tilde{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents (cf 1.6.5.3). D'après le théorème 4.4.12 de [6], le faisceau $\mathscr{L}_\pi = sp_*(L_\pi)$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{T},\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche cohérent, dont le $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{T},\mathbf{Q}}$-module sous-jacent est isomorphe à $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{T},\mathbf{Q}}$ (le morphisme sp_* est le morphisme de spécialisation de $\mathscr{T}_K$, la fibre générique de $\mathscr{T}$, vers $\mathscr{T}$). On supposera, en suivant les conventions de la partie 7 de [15] que c'est un complexe placé en degré $+1$. Le complexe $\lambda^! \mathscr{L}_\pi$ est donc réduit à un faisceau placé en degré $2-2N$, qui est un $\mathscr{D}^\dagger_{\tilde{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent d'après 1.5.4, correspondant en fait à l'isocristal image inverse de $\mathscr{L}_\pi$ via le morphisme de spécialisation. Par abus de notation le complexe $f_* \lambda^! \mathscr{L}_\pi$ sera de nouveau noté $\lambda^! \mathscr{L}_\pi$: c'est un $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}$-module cohérent isomorphe à $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}$, placé en degré $2-2N$, et dont la structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module est donnée sur $\mathscr{W}$ par :

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\cdot f &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \pi y_i f\\ \partial_{y_i}\cdot f &= \frac{\partial f}{\partial y_i} - \pi x_i f.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. On renvoie à [7] pour l'existence d'une structure de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module sur le produit tensoriel $\lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} \mathscr{N}$ et pour le fait que le module obtenu est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. Observons enfin toujours selon [7], qu'il existe un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} \lambda^!\mathscr{L}_\pi \simeq \lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty),$$

où le premier module est muni de la structure induite et où le deuxième est munie de la structure tordue. Bien entendu tous ces résultats sont valables aussi sur $\tilde{\mathscr{Z}}$.

Toujours en suivant les conventions de la partie 7 de [15], si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux complexes de $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$, on notera :

$$\mathscr{M}\tilde{\otimes}_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}}\mathscr{N} = \mathscr{M} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} \mathscr{N}\,[-d_{\mathscr{Z}}].$$

Nous aurons besoin de travailler avec la version algébrique sur $S = \mathrm{Spec}V$ de tous ces schémas formels : nous remplacerons les notations en lettres cursives par les mêmes en lettres droites.

Soit maintenant le diagramme commutatif : (où par définition $\xi_1 = p_1 \circ f$ et $\xi_2 = p_2 \circ f$) :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{\mathscr{Z}} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "\xi_1"'] \arrow[ddr, "\xi_2"] & \mathscr{T} \\
 & \mathscr{Z} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathscr{X} \arrow[dr] & & \mathscr{Y} \arrow[dl] \\
 & \mathscr{S}. &
\end{tikzcd}$$

Définition. Soit $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. On pose

$$\mathscr{F}(\mathscr{M}) = \xi_{2+}\left(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}}\xi_1^!\mathscr{M}\right),$$

qui est un way-out foncteur au sens de [12].

Le complexe $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ est le tranformé de Fourier de $\mathscr{M}$.

4.2.1 Simplification du calcul de $\mathscr{F}(\mathscr{M})$. On indique ici comment ramener le calcul de $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ à un calcul sur $\mathscr{Z}$, en utilisant le résultat d'invariance birationnelle 1.6.5.3.

4.2.1.1 Proposition. *Soit $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, alors il existe un isomorphisme canonique de complexes de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche :*

$$\xi_{2+}\left(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\hat{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}}\xi_1^!\mathscr{M}\right) \simeq p_{2+}\left(f_+\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}}p_1^!\mathscr{M}\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, le $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}$-module sous-jacent à $f_+\lambda^!\mathscr{L}_\pi$ est isomorphe à $\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}$. Ensuite, compte tenu du théorème de composition des morphismes propres de [7], $\xi_{2+} = p_{2+}\circ f_+$. D'après le théorème de composition des images inverses, appliqué à $\mathscr{M}$ qui est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérent, $\xi_1^!\mathscr{M} = f^!\circ p_1^!\mathscr{M}$. Finalement, p_1 étant lisse, $p_1^!\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$ et nous sommes ramenés à montrer que si $\mathscr{N} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\hat{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}(\infty))$, il existe un isomorphisme canonique :

$$f_+(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\hat{\mathscr{Z}},\mathbf{Q}}}\mathscr{N}) \simeq f_+\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}}f_+\mathscr{N}.$$

Rappelons alors que $\mathscr{N} \simeq f_+f^!\mathscr{N}$, de sorte finalement que le résultat provient d'une formule analogue au lemme 9.9 de [9] (qu'on vérifie aisément par passage à la limite à partir d'un niveau fini.)

4.3 Comparaison avec la transformation de Fourier naïve.

4.3.1 Fourier naïf. Considérons

$$A_N(K)^\dagger = \left\{\sum_{\underline{l},\underline{k}} a_{\underline{l},\underline{k}}\underline{x}^{\underline{l}}\underline{\partial}^{[\underline{k}]},\ \text{où } a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \text{ et } \exists C>0,\ \eta<1 : |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}\right\}.$$

On rappelle que l'on a établi en 3.2.3 que $A_N(K)^\dagger$ s'identifie à $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$.

Cette algèbre est munie d'une involution F définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(\partial_{x_i}) &= \pi x_i \\ F(x_i) &= -\partial_{x_i}/\pi, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Définition. Soit $M \in D^b_{coh}(A_N(K)^\dagger)$. On pose $F(M) = A_N(K)^\dagger\otimes_{A_N(K)^\dagger}M$ où $A_N(K)^\dagger$ est considéré comme un $A_N(K)^\dagger$-module via l'action de F^{-1}, c'est-à-dire que si $(a,m) \in A_N(K)^\dagger\times M$, $a\otimes m = 1\otimes F^{-1}(a)m$.

L'objet de cette partie est d'établir qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F}(\mathcal{M})[2-N]) \simeq F(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})),$$

si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent.

D'après la proposition précédente, on peut se ramener à un calcul sur $\mathfrak{X}$. On commence pour cela par faire le calcul pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ et on traite ensuite le cas des modules cohérents quelconques en utilisant le fait que tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent admet une résolution sur $\mathcal{X}$ par des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres. On rappelle que le module $\lambda^! \mathcal{L}_\pi[2-2N]$ est en fait placé en degré 0.

Dans tout le chapitre, nous noterons $\tilde{\mathcal{F}}$ le $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-module $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}$-module cohérent.

Nous commençons par un lemme. Les symboles $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$ et $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Z}}$ désignent respectivement $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} \otimes \bigwedge^N \Omega^1_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{Z},\mathbf{Q}} \otimes \bigwedge^{2N} \Omega^1_{\mathfrak{Z}}$.

4.3.1.1 Lemme. *(i) Les éléments* $\partial_{y_i}^{\langle k_i \rangle (m)} \in \Gamma(Z, \mathcal{D}^{(m)}_Z)$ *sont des sections globales du faisceau* $\mathcal{D}^{(m)}_Z$.

(ii) Les faisceaux $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$ *et* $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Z}}$ *sont respectivement des* $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$ *et des* $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{Z},\mathbf{Q}}$*-modules libres.*

(iii) Le faisceau tangent relatif $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathfrak{Z}/\mathfrak{Y}}$ *est un* $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{Z},\mathbf{Q}}$*-module libre.*

Démonstration. Montrons (i). Les faisceaux $p_1^*\mathcal{D}^{(m)}_X$ et $p_2^*\mathcal{D}^{(m)}_Y$ sont des $\mathcal{D}^{(m)}_Z$-modules à gauche. L'élément $1 \otimes 1$ est une section canonique du $\mathcal{D}^{(m)}_Z$-module à gauche $p_1^*\mathcal{D}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} p_2^*\mathcal{D}^{(m)}_Y$ (où la structure est la structure produit tensoriel). Il existe donc un morphisme canonique de $\mathcal{D}^{(m)}_Z$ vers $p_1^*\mathcal{D}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} p_2^*\mathcal{D}^{(m)}_Y$, qui à P associe $P \cdot 1 \otimes 1$. On vérifie localement que ce morphisme est un isomorphisme, et on note σ le morphisme inverse. Nous avons montré en 3.2.1.1, que $\partial_{y_i}^{\langle k_i \rangle (m)} \in \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^{(m)}_Y)$, de sorte que l'élément $\sigma(\partial_{y_i}^{\langle k_i \rangle (m)})$ est une section globale de $\mathcal{D}^{(m)}_Z$, dont la restriction à $\mathcal{W}$ est $\partial_{y_i}^{\langle k_i \rangle (m)}$. Mais il existe un seul prolongement éventuel de $\partial_{y_i}^{\langle k_i \rangle (m)}$, d'où le (i).

Pour voir que $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$ est libre, il suffit de voir que $\tilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}}$ est libre. Sur l'ouvert U_0, ce faisceau est un $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$-module libre de base les

$$d\left(\frac{u_i}{u_0}\right) = \frac{u_j}{u_0} d\left(\frac{u_i}{u_j}\right) - \frac{u_i u_j}{u_0^2} d\left(\frac{u_0}{u_j}\right).$$

Cette relation montre en fait que $d(u_i/u_0) \in \Gamma(\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}, \tilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}})$. Nous pouvons donc considérer l'application naturelle $\bigoplus_i \mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} dx_i \to \tilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}}$. Cette application est un isomorphisme sur $\mathcal{U}_0$: c'est donc un isomorphisme sur tout $\mathcal{X}$. En utilisant la flèche canonique

$p_1^*\tilde{\Omega}^1_{\mathcal{X}} \xrightarrow{u} \tilde{\Omega}^1_{\mathscr{X}}$, on voit que $u(dx_i)$ est une section globale de $\tilde{\Omega}^1_{\mathscr{X}}$ dont la restriction à $\mathscr{W}$ est dx_i. De même les éléments dy_i sont des sections globales de $\tilde{\Omega}^1_{\mathscr{X}}$, ce qui nous permet de considérer le morphisme canonique

$$\bigoplus_i \mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} dx_i \bigoplus_j \mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} dy_j \to \tilde{\Omega}^1_{\mathscr{X}},$$

qui est un isomorphisme comme précédemment. Pour le faisceau $\tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}$, on procède de même. On sait déjà que $\partial_{y_i} \in \Gamma(Z, \mathscr{T}_Z)$. Il existe une suite exacte

$$0 \to \Gamma(\mathscr{X}, \tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}) \to \Gamma(\mathscr{X}, \tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{s} \Gamma(\mathscr{X}, p_1^* \mathscr{T}_{\mathscr{Y}}) \to 0.$$

Mais $s(\partial_{y_i}) = 0$, de sorte que ∂_{y_i} est une section globale de $\tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}$. On conclut alors comme précédemment.

4.3.2 Calcul de $\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty))$. Calculons d'abord $p_1^! \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$: c'est un complexe de modules cohérents, car p_1 est lisse ; ce complexe est concentré en degré $-N$ où il est isomorphe à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$. Sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$, on dispose de $1 \otimes 1$, comme section canonique, ce qui permet de considérer le morphisme ε :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) & \to & \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty) \\ P & \mapsto & P \cdot 1 \otimes 1. \end{array}$$

4.3.2.1 Proposition. *L'homomorphisme $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ fait du complexe de Spencer*

$$0 \to \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)} \bigwedge^N \tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}/\mathcal{X}} \to \dots \to \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)} \tilde{\mathscr{T}}_{\mathscr{X}/\mathcal{X}} \xrightarrow{d_0} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \to 0,$$

une résolution de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$.

Démonstration. Notons $K_\bullet$ le complexe de Spencer considéré, les termes K_i de ce complexe étant numérotés de N à 0. Remarquons d'abord que $\varepsilon \circ d_0$ est nul. En effet, les modules $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes \mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathcal{X}})$ et $\Gamma(\mathscr{U}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ se plongent respectivement dans $\Gamma(\mathscr{U} \cap \mathscr{W}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes \mathscr{T}_{\mathscr{X}/\mathcal{X}})$ et dans $\Gamma(\mathscr{U} \cap \mathscr{W}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty))$, pour tout ouvert affine $\mathscr{U}$. Finalement il suffit de montrer que $\varepsilon \circ d_0$ est nul sur $\mathscr{W}$, ce qui est classique. On peut donc considérer le complexe de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules cohérents $C_\bullet = K_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty) \to 0$. Comme ce complexe est exact sur $\mathscr{W}$ (cf par exemple 3.2.1 de [4]), il est exact sur $\mathscr{X}$ tout entier d'après 4.3.12 de [6].

4.3.2.2 Proposition. *Notons $K'_{\bullet}$ le complexe dont le terme général est*

$$K'_n = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \bigwedge^n \tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}/\mathcal{X}},$$

et dont la différentielle est donnée sur $\mathscr{W}$ par la formule :

$$d'_n(P \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}}) = \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{l-1} P \cdot (\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l}) \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \hat{\partial_{y_{i_l}}} \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}}.$$

Alors, $K'_{\bullet}$ est une résolution $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-linéaire de $\lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X} \to \mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$.

Démonstration. Considérons la résolution de $p_1^! \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ donnée par $K_{\bullet}$. Comme le module $\lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N]$ est un $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module plat, le complexe $\lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} K_{\bullet}$ est une résolution de $\lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty)$. Nous avons rappelé dans l'introduction qu'il existe un isomorphisme canonique de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules à gauche :

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \bigwedge^n \tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}/\mathcal{X}} \simeq \lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \bigwedge^n \tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}/\mathcal{X}}),$$

soit encore un isomorphisme $\sigma_n : \lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes K_n \simeq K'_n$. Vérifions que la différentielle ainsi obtenue est bien donnée par la formule du corollaire. La différentielle d'_n est égale à $\sigma_n \circ d_n \circ \sigma_{n+1}^{-1}$. D'autre part, la différentielle étant $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-linéaire à gauche, il suffit de calculer $d'_n(1 \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}})$ pour déterminer d'_n. Or, nous avons les égalités

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{-1}(1 \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}}) &= 1 \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}}, \\
d_n(1 \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}}) &= \sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{l-1} 1 \otimes \partial_{y_{i_l}} \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \hat{\partial_{y_{i_l}}} \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}} \\
&= \sigma_n^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{l-1} (\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l}) \otimes 1 \otimes \partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \hat{\partial_{y_{i_l}}} \ldots \wedge \partial_{y_{i_{n+1}}} \right.
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous fixerons la base $\partial y_1, \ldots, \partial y_N$ de $\tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}/\mathcal{X}}$ comme $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module, ce qui revient à identifier le $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\bigwedge^n \mathscr{T}_{\mathfrak{X}/\mathcal{X}}$ au $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de base les $\partial_{y_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{y_{i_n}}$. On peut aussi identifier $\lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N]$ à $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, dont la structure de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module a été tordue. On continue à noter $K'_{\bullet}$ le complexe obtenu via ces identifications. La différentielle de ce complexe a la même description que d'_n sur l'ouvert $\mathscr{W}$ et on continuera de l'appeler d'_n.

Terminons par une description du morphisme d'augmentation $\varepsilon : K'_0 \to \lambda^! \mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes p_1^! \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\partial_{y_i}) &= -1 \otimes \pi x_i \\
\varepsilon(\partial_{x_i}) &= \partial_{x_i} \otimes 1 - 1 \otimes \pi y_i,
\end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Calculons maintenant une résolution de $\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. Pour faire cela, le point essentiel est que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est acyclique pour p_{2*}.

4.3.2.3 Lemme. *Il existe un isomorphisme (non canonique) de groupes abéliens*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty) \simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty).$$

Démonstration. Rappelons l'isomorphisme

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty) = \tilde{\omega}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{X}}} p_2^*\tilde{\omega}_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}.$$

Nous avons déjà constaté que $\tilde{\omega}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$ et que $\tilde{\omega}_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}$ sont en fait triviaux sur $\mathscr{X}$. Nous considérerons les isomorphismes donnés par notre choix de coordonnées dans l'introduction, ce qui montre le lemme.

Dans cette identification, les structures droite et gauche de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ correspondent à celles qu'on obtient sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$ en utilisant l'action par l'opérateur adjoint. Nous noterons celles-ci par $*$; on a donc par exemple pour $P \in \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$:

$$P_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) = (-\partial_{y_i} + \pi x_i)P.$$

L'action à droite (adjointe) par $(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ sur $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$ induit une action sur $p_{2*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$, que l'on continuera de noter $*$, par abus.

Pour voir que $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est acyclique pour p_{2*}, nous sommes donc ramenés à établir ce résultat pour $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$, puisque cela ne dépend que du groupe abélien sous-jacent. Ce module est naturellement filtré par les modules $\hat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$. Pour des raisons techniques, nous emploierons une filtration légèrement différente de ce module, par des $\hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$-modules complets.

4.3.2.4 Une filtration croissante de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$. Introduisons $\mathscr{B}'^{(m)}_Z = p_1^*\mathscr{B}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} p_2^*\mathscr{B}^{(m)}_Y$, $\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) = \mathscr{B}'^{(m)}_Z \otimes_{p_2^{-1}\mathcal{O}_Y} p_2^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_Y$, $\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y}}(\infty)$ le complété p-adique de ce faisceau et

$$\mathscr{D}'^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_m \hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty).$$

Remarquons que le faisceau $\mathscr{B}'^{(m)}_Z$ est sans p-torsion.

4.3.2.5 Lemme. *Avec les notations de 4.3.2.4, il existe un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$-modules à gauche :*

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty) \simeq \mathscr{D}'^{\dagger}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty).$$

Démonstration. Soient $\alpha_1^{(m)}$ et $\alpha_2^{(m)}$ les morphismes canoniques $p_1^*\mathscr{B}_X^{(m)} \to \mathscr{B}_Z^{(m)}$ et $p_2^*\mathscr{B}_Y^{(m)} \to \mathscr{B}_Z^{(m)}$ respectivement. Posons $\alpha^{(m)} = \alpha_1^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \alpha_2^{(m)} : \mathscr{B}_Z'^{(m)} \to \mathscr{B}_Z^{(m)}$, qui est une application $p_2^{-1}\mathscr{B}_Y^{(m)}$-linéaire. On introduit maintenant une application V-linéaire $\beta^{(m)} : \mathscr{B}_Z^{(m)} \to \mathscr{B}_Z'^{(m+1)}$, de la façon suivante. Sur $\mathscr{U}_{i,j} = D_+(u_i) \times D_+(u_j)$, nous avons les égalités :

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_Z'^{(m+1)}(U_{i,j}) &= \mathcal{O}_Z[T_1] \Big/ \left(\left(\frac{u_0}{u_i}\right)^{p^{m+2}} T_1 - p\right) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z[T_2] \Big/ \left(\left(\frac{v_0}{v_j}\right)^{p^{m+2}} T_2 - p,\right)\\
\mathscr{B}_Z^{(m)}(U_{i,j}) &= \mathcal{O}_Z[T] \Big/ \left(\left(\frac{u_0\, v_0}{u_i\, v_j}\right)^{p^{m+1}} T - p.\right)
\end{aligned}$$

Ces deux algèbres se plongent respectivement dans $\mathscr{B}_{Z,\mathbf{Q}}'^{(m+1)}$ et dans $\mathscr{B}_{Z,\mathbf{Q}}^{(m)}$. Si l'on note $\tilde{u}_l = u_l/u_i$ et $\tilde{v}_l = v_l/v_j$, I' l'ensemble d'indices de longueur N

$$I' = \{(k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_N) \mid k_0 \in \mathbf{Z} \text{ et } \forall l \geq 1,\ k_l \in \mathbf{N}\},$$

I'' l'ensemble d'indices analogue à I' obtenu en remplaçant i par j dans la formule. L'algèbre $\mathscr{B}'^{(m+1)}(U_{i,j})$ s'identifie alors à la V-algèbre :

$$\left\{ \bigoplus_{\underline{l}'\in I',\underline{l}''\in I''} V\, p^{\nu_{m+1}(-l_0')+\nu_{m+1}(-l_0'')} \underline{\tilde{u}}^{\underline{l}'} \underline{\tilde{v}}^{\underline{l}''} \right\}.$$

Définissons un homomorphisme de $\mathcal{O}_Z$-algèbres $\varphi_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_Z[T] &\to \mathscr{B}_Z'^{(m+1)}(U_{i,j})_{\mathbf{Q}}\\
T &\mapsto p\tilde{u}_0^{-p^{m+1}}\, \tilde{v}_0^{-p^{m+1}}
\end{aligned}$$

Remarquons que $\varphi_{i,j}(T^k) = p^k \tilde{u}_0^{-kp^{m+1}}\, \tilde{v}_0^{-kp^{m+1}}$. La quantité $k - 2\nu_{m+1}(kp^{m+1})$ est minorée par $k - 2(k/p) - 1$ et est donc minorée par -1 pour tout $k \in \mathbf{N}$. Cela signifie que l'application V-linéaire $p\varphi_{i,j}$ est en fait à valeurs dans $\mathscr{B}_Z'^{(m+1)}$. Ensuite, il est clair que

$$\varphi_{i,j}\left(\left(\frac{u_0\, v_0}{u_i\, v_j}\right)^{p^{m+1}} T - p\right) = 0.$$

C'est aussi le cas pour $p\varphi_{i,j}$ qui passe donc au quotient en une application $\beta_{i,j}$: $\mathscr{B}_Z^{(m)}(U_{i,j}) \to \mathscr{B}_Z'^{(m+1)}(U_{i,j})$. On vérifie facilement que ces applications se recollent en une application $\beta^{(m)} : \mathscr{B}_Z^{(m)} \to \mathscr{B}_Z'^{(m+1)}$. Notons enfin $i'_{m,m+1}$, $i_{m,m+1}$ et $\rho_{m,m+1}$ les inclusions canoniques respectives $\mathscr{B}_Z'^{(m)} \to \mathscr{B}_Z'^{(m+1)}$, $\mathscr{B}_Z^{(m)} \to \mathscr{B}_Z^{(m+1)}$ et $p_2^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m)} \to p_2^{-1}\mathscr{D}_Y^{(m+1)}$. En utilisant l'inclusion de $\mathscr{B}_Z^{(m)}$ dans $\mathscr{B}_{Z,\mathbf{Q}}^{(m)}$, on voit que et $\alpha^{(m+1)} \circ \beta^{(m)} = pi_{m,m+1}$. De même, on vérifie que $\beta^{(m+1)} \circ \alpha^{(m)}$ est égal à $pi'_{m,m+1}$.

Soient maintenant $\gamma^{(m)} = \alpha^{(m)} \otimes 1 : \mathcal{B}'^{(m)}_Z \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_Y \to \mathcal{B}^{(m)}_Z \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_Y$, et $\delta^{(m)} = \beta^{(m)} \otimes \rho_{m,m+1} : \mathcal{B}^{(m)}_Z \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_Y \to \mathcal{B}'^{(m+1)}_Z \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}^{(m+1)}_Y$. Alors, le composé $\delta^{(m)} \circ \gamma^{(m)}$ est égal à p fois l'inclusion canonique $\mathcal{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) \to \mathcal{D}'^{(m+1)}_{Z\to Y}(\infty)$ et $\gamma^{(m)} \circ \delta^{(m)}$ est égal à p fois l'inclusion canonique : $\mathcal{D}^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) \to \mathcal{D}^{(m+1)}_{Z\to Y}(\infty)$. Soient $\hat{\gamma}^{(m)}$ et $\hat{\delta}^{(m)}$ les applications obtenues à partir de $\delta^{(m)}$ et de $\gamma^{(m)}$ en passant aux complétés p-adiques et en tensorisant par $\mathbb{Q}$, et $\hat{\delta}'^{(m)} = 1/p\hat{\delta}^{(m)}$. Alors, en passant à la limite inductive sur m, ces applications définissent un isomorphisme $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}$-linéaire $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y},\mathbb{Q}}(\infty) \simeq \mathcal{D}'^\dagger_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y},\mathbb{Q}}(\infty)$.

4.3.2.6 Proposition. *(i) Les faisceaux $R^k p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ sont nuls pour tout $k \geq 1$.*

(ii) Soit $\mathcal{V}'$ un ouvert affine de $\mathcal{Y}$, muni de coordonnées locales $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$. Tout opérateur P de $\Gamma(\mathcal{V}', p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ s'écrit d'une unique façon

$$P = \sum \underline{x}^{\underline{l}} a_{\underline{l},\underline{k}} \partial_{\underline{y}}^{[\underline{k}]},$$

où $a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$ et il existe $C > 0$, $\eta < 1$ tels que $|a_{\underline{l},\underline{k}}|_{sp} \leq C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}$. De plus, sur $\mathcal{V}' \bigcap \mathcal{V}_0$, on a la relation

$$\partial_{y_i} * P = -\sum \underline{x}^{\underline{l}} a_{\underline{l},\underline{k}} \partial_{\underline{y}}^{[\underline{k}]} \partial_{y_i} \quad \text{et} \quad P * (\partial_{y_i} + \pi x_i) = (-\partial_{y_i} + \pi x_i) \cdot \sum \underline{x}^{\underline{l}} a_{\underline{l},\underline{k}} \partial_{\underline{y}}^{[\underline{k}]}.$$

Démonstration. D'après le lemme 4.3.2.3, il suffit de calculer $R^k p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y},\mathbb{Q}}(\infty))$, pour montrer la première assertion. Finalement, il suffit pour cela de calculer $\varinjlim_m R^k p_{2*} \hat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y},\mathbb{Q}}(\infty)$, puisque la cohomologie commute à la limite inductive par noethérianité de $\mathcal{X}$.

Considérons le diagramme cartésien d'espaces annelés :

$$\begin{array}{ccc} (Z, p_1^*\mathcal{B}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} p_2^*\mathcal{B}^{(m)}_Y) & \xrightarrow{p_1'} & (X, \mathcal{B}^{(m)}_X) \\ \downarrow p_2' & & \downarrow f \\ (Y, \mathcal{B}^{(m)}_Y) & \xrightarrow{u} & (S, \mathcal{O}_S). \end{array}$$

Le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}_Y$ est sans p-torsion, de sorte que u est plat. De plus, f est séparé de type fini. On peut donc appliquer la formule de changement de base pour la cohomologie et on obtient un isomorphisme canonique :

$$Rp'_{2*}\mathcal{B}'^{(m)}_Z = Rp'_{2*}(p_1'^*\mathcal{B}^{(m)}_X) \simeq u^*\mathbf{R}f_*\mathcal{B}^{(m)}_X.$$

Or, le complexe $\mathbf{R}f_*\mathcal{B}^{(m)}_X$ est réduit au degré zéro d'après un résultat de Berthelot (cf l'appendice de [14]) et $R^0 f_*\mathcal{B}^{(m)}_X = \oplus_{\underline{l}} \mathcal{O}_S p^{\nu_m(|\underline{l}|)} \underline{x}^{\underline{l}}$, d'après 3.1.1.3. En appliquant la formule de la projection à p_2', on trouve l'isomorphisme

$$\mathbf{R}p'_{2*}(\mathscr{B}'^{(m)}_{Z} \otimes^{\mathbf{L}}_{p_2^{-1}\mathscr{B}^{(m)}_{Y}} p_2^{-1}\mathscr{D}^{(m)}_{Y}(\infty)) \simeq \mathbf{R}p'_{2*}(\mathscr{B}'^{(m)}_{Z}) \otimes_{\mathscr{B}^{(m)}_{Y}} \mathscr{D}^{(m)}_{Y}(\infty).$$

Le complexe $\mathbf{R}p'_{2*}\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)$ est donc réduit au degré zéro où il est isomorphe à $\oplus_{|\underline{l}|} p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}\mathscr{D}^{(m)}_{Y}(\infty)$.

Comme $\mathscr{B}'^{(m)}_{Z}$ est sans p-torsion, nous pouvons considérer les suites exactes :

$$0 \to \mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) \xrightarrow{p^i} \mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) \to \alpha_i^*\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty) \to 0.$$

En passant à la longue suite exacte de cohomologie, on en déduit que $R^k p'_{2*}(\alpha_i^*\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty))$ est nul pour tout $k \geq 1$ et que $R^0 p'_{2*}(\alpha_i^*\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)) = R^0 p'_{2*}\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)/p^i R^0 p'_{2*}\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)$. En particulier, le système projectif des $R^n p'_{2*}\alpha_i^*\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler pour tout $n \geq 0$. Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R^n p'_{2*}\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}}(\infty)$ est isomorphe à $\varprojlim_i R^n p'_{2*}(\alpha_i^*\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty))$ et est donc nul si $n \geq 1$, ce qui montre l'assertion (i).

De plus, le module $R^0 p'_{2*}\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}}(\infty)$ s'identifie au séparé complété de $R^0 p'_{2*}\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty)$. Sur un ouvert $\mathscr{V}'$ comme dans l'énoncé, tout élément P de $R^0 p'_{2*}\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}}(\infty)$ s'écrit d'une unique façon

$$P = \sum \underline{x}^{\underline{l}} p^{\nu_m(|\underline{l}|)} a_{\underline{l},\underline{k}} \partial_{\underline{y}}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}},$$

où $a_{\underline{l},\underline{k}} \in \hat{\mathscr{B}}^{(m)}_{\mathfrak{Y}}(\mathscr{V}')$ et $|a_{\underline{l},\underline{k}}|_{sp} \to 0$ si $|\underline{l}| + |\underline{k}| \to \infty$. En passant à la limite inductive sur m et en identifiant $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, puis $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$ respectivement à $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et à $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$, on obtient la description de l'énoncé. Sur $\mathscr{W}$, l'action de ∂_y sur P est donnée par $\partial_y(1 \otimes P \otimes 1) = -1 \otimes P\partial_y \otimes 1$. Mais cette formule est en fait valable sur tout $\mathfrak{Y}$ du fait de l'inclusion $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \hookrightarrow j_*\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ De même, l'action $*(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ correspond avec notre identification à l'action à gauche par $(-\partial_{y_i} + \pi x_i)$ dans $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}(\infty)$. D'où la fin du (ii) de la proposition.

4.3.2.7 Corollaire. *Le complexe* $L_\bullet = p_{2*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)} K'_\bullet)$ *est une résolution du complexe* $\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))[2-N]$.

Démonstration. Le complexe $K'_\bullet$ est une résolution libre de type fini, de sorte que le complexe

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)} K'_\bullet$$

calcule $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)} (\lambda^!\mathscr{L}_\pi[2-2N] \otimes \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\to\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$. D'après la proposition précédente, ce complexe est à termes acycliques pour p_{2*}, d'où le corollaire.

4.3.2.8 Notations.

Calculons maintenant $\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. Soit $\mathscr{V}_j = D_+(v_j)$, muni des coordonnées $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_N$ où $\tilde{y}_i = v_i/v_j$. Introduisons l'anneau

$$A = \{\sum_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{\partial}_{\tilde{y}}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\mathscr{V}_j) \text{ et } \exists C, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}\}.$$

Nous identifierons A à $p_{2*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty))(\mathscr{V}_j)$, grâce au résultat de la proposition 4.3.2.6. Nous avons alors le lemme de division suivant.

4.3.2.9 Lemme. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et pour tout $P \in A$, il existe un unique couple $(Q, R) \in A \times A$, tel que $R = \sum_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} r_{\underline{l},\underline{k}} \underline{\partial}_{\tilde{y}}^{[\underline{k}]}$ où $r_{\underline{l},\underline{k}} = 0$ si $l_i \neq 0$ et vérifiant*

$$P = Q_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) + R.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. Soit A_i le sous-anneau de A constitué des éléments R dont les coefficients $r_{\underline{l},\underline{k}}$ sont nuls si $l_i \neq 0$. Il s'agit alors de montrer que si $Q_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) \in A_i$, alors $Q = 0$. Notons que A se plonge dans

$$A' = p_{2*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty))(\bigcap_{i=0}^{N} \mathscr{V}_i).$$

Introduisons de plus A'_i le sous-anneau de A' constitué des éléments R dont les coefficients $r_{\underline{l},\underline{k}}$ sont nuls si $l_i \neq 0$. L'inclusion de A dans A' induit une inclusion de A_i dans A'_i. Pour montrer notre assertion dans A, il suffit donc de montrer que si $Q \in A'$ et si $Q_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) \in A'_i$, alors $Q = 0$. Nous choisissons alors comme base les $\underline{\partial}_y^{[\underline{k}]}$ dans A'. Soient $q_{\underline{l},\underline{k}}$ les coefficients d'un tel Q. Les éléments $q_{\underline{l},\underline{k}}$ sont dans

$$V\{y_j, 1/y_j\}_{1\leq j\leq N} \otimes K$$

et il existe $C, \eta < 1$ tels que $|q_{\underline{l},\underline{k}}| < C\eta^{|\underline{l}|+|\underline{k}|}$. On calcule alors :

$$Q_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) = \sum_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \left(-k_i q_{\underline{l},\underline{k}-1_i} - \frac{\partial q_{\underline{l},\underline{k}}}{\partial y_i} + \pi q_{\underline{l}-1_i,\underline{k}} \right) \underline{\partial}_y^{[\underline{k}]}.$$

Finalement $Q_*(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ est dans A'_i si et seulement si $\forall \underline{k} \in \mathbf{N}^N$, $\forall \underline{l} \in \mathbf{N}^N$, tel que $l_i \neq 0$,

$$(1) \qquad -k_i q_{\underline{l},\underline{k}-1_i} - \frac{\partial q_{\underline{l},\underline{k}}}{\partial_{y_i}} + \pi q_{\underline{l}-1_i,\underline{k}} = 0.$$

Supposons que Q soit non nul. Il existe alors $(\underline{l}, \underline{k})$ tel que $q_{\underline{l},\underline{k}}$ soit non nul. Posons $\underline{l}' = \underline{l} - l_i 1_i$ et $\underline{k}' = \underline{k} - k_i 1_i$ et choisissons (a, b) minimal pour l'ordre lexicographique tel que $q_{\underline{l}'+b1_i,\underline{k}'+a1_i} \neq 0$. Notons alors $u_c = q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}$. Cet élément se développe en série par rapport à y_i :

$$u_c = \sum_{t\in\mathbf{Z}} v_t^c y_i^t \quad \text{où } v_t^c \in V\{y_j, 1/y_j\}_{j\neq i} \otimes K \quad \text{et} \quad |v_t^c|_{sp} \to 0 \text{ si } |t| \to +\infty.$$

Comme $q_{\underline{l},\underline{k}'+(a-1)1_i}$ est nul pour tout $\underline{l}$, la relation (1) s'écrit encore :

$$(2) \quad \forall c \geq 0,\ \frac{\partial u_{c+1}}{\partial y_i} - \pi u_c = 0$$

qui s'écrit encore

$$\forall c \geq 0,\ \sum_{t\in\mathbf{Z}}((t+1)v_{t+1}^{c+1} - \pi v_t^c)y^t = 0,$$

d'où la relation de récurrence sur les suites (v_t^c)

$$\forall c \geq 0,\ \forall t \in \mathbf{Z},\ v_t^c = \frac{t+1}{\pi} v_{t+1}^{c+1}.$$

On en déduit les formules :

$$\forall c \geq b,\ v_t^b = \frac{(t+1)\cdots(c-b+t)}{\pi^{c-b}} v_{t+c-b}^c.$$

En particulier, si $t < 0$, v_t^b est nul. Soit $t_0 = \min\{t \mid v_t^b \neq 0\}$, on a alors la relation

$$v_{t_0+c-b}^c = \frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdots(c-b+t_0)} v_{t_0}^b.$$

La norme spectrale de u_c est donnée par $|u_c|_{sp} = \sup_t |v_t^c|_p$, de sorte que

$$\forall c,\ |q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}|_{sp} \geq \left|\frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdots(c-b+t_0)}\right|_p |v_{t_0}^b|_{sp}.$$

Notons que

$$v_p\left(\frac{\pi^{c-b}}{(t_0+1)\cdots(c-b+t_0)}\right) = \frac{-t_0}{p-1} + v_p(t_0!) + \frac{\sigma(c-b+t_0)}{p-1},$$

où $\sigma(n)$ est la somme des chiffres de n en base p. Introduisons

$$C_1 = p^{(\frac{-t_0}{p-1}+v_p(t_0!))}|v_{t_0}^b|_{sp},$$

alors nous avons l'inégalité

$$|q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}|_{sp} \geq C_1 p^{-\frac{\sigma(c-b+t_0)}{p-1}},$$

D'autre part, on doit avoir :

$$|q_{\underline{l}'+c1_i,\underline{k}'+a1_i}|_{sp} \leq C\eta^{|\underline{l}'|+a+|\underline{k}'|}\eta^c,$$

ce qui est une contradiction car $\sigma(c-b+t_0)$ ne tend pas vers $+\infty$ si c tend vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration de l'unicité.

Montrons maintenant l'existence. Sur $\mathscr{V}_0$, l'action des éléments ∂_{y_i} et $(\partial_{y_i}+\pi x_i)$ commute. Comme le morphisme canonique

$$\Gamma(\mathscr{V}, p_{2*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \to \Gamma(\mathscr{V}\bigcap\mathscr{V}_0, p_{2*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)),$$

est injectif pour tout ouvert affine $\mathscr{V}$, l'action des éléments ∂_{y_i} et $(\partial_{y_i}+\pi x_i)$ commute. Avec les notations de 4.3.2.8, notons $A^{(m)} = R^0p'_{2*}(\mathscr{D}'^{(m)}_{Z\to Y}(\infty))(\mathscr{V}_j)$. Tout élément P de $A^{(m)}$ s'écrit d'une unique façon $P=\sum_{\underline{l},\underline{k}} p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}p_{\underline{l},\underline{k}}\underline{\partial}_{\underline{y}}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}$, où $p_{\underline{l},\underline{k}}\in\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{Y}}(\mathscr{V}_j)$. Soit $A_i^{(m)}$ le sous $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{Y}}$-module de $A^{(m)}$ constitué des éléments P tels que $p_{\underline{l},\underline{k}}=0$ si $l_i\neq 0$ en utilisant l'écriture précédente. Notons encore $\hat{A}^{(m)} = R^0p_{2*}\hat{\mathscr{D}}'^{(m)}_{\mathscr{X}\to\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathscr{V}_j)$ et $\hat{A}_i^{(m)}$ le complété p-adique de $A_i^{(m)}$. Comme $\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}$-module, A s'identifie à la limite inductive des $\hat{A}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$ et A_i s'identifie à la limite inductive des $\hat{A}^{(m)}_{i,\mathbf{Q}}$. Le théorème d'existence découle facilement du lemme suivant.

4.3.2.10 Lemme. *Il existe des applications $\mathscr{B}^{(m)}_{\mathscr{Y}}$-linéaires $\varphi : A^{(m)}\to A^{(m+2)}$ et $\psi : A^{(m)}\to A_i^{(m+2)}$ et un entier naturel c tel que, pour tout $P\in A^{(m)}$, $p^cP=\varphi(P)*(\partial_{y_i}+\pi x_i)+\psi(P)$ (cette égalité ayant un sens dans A).*

Démonstration. Remarquons que, pour tout $l_i\geq 1$, nous avons les égalités suivantes dans $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ (du fait que les éléments $(-\partial_{y_i}+\pi x_i)$ et ∂_{y_i} commutent) :

$$\begin{aligned} x_i^{l_i} &= \frac{1}{\pi^{l_i}}((-\partial_{y_i}+\pi x_i)+\partial_{y_i})^{l_i} \\ &= \frac{1}{\pi^{l_i}}\partial_{y_i}^{l_i} + (-\partial_{y_i}+\pi x_i)\sum_{t=1}^{l_i}\sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-1-s}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}\binom{l_i}{t}\binom{t-1}{s}x_i^s\partial_{y_i}^{l_i-1-s}, \end{aligned}$$

soit encore : (2')

$$\begin{aligned} x_i^{l_i} &= \frac{l_i!}{q_{l_i}^{(m+2)}!\pi^{l_i}}\partial_{y_i}^{\langle l_i\rangle_{(m+2)}} \\ &+(-\partial_{y_i}+\pi x_i)\sum_{t=1}^{l_i}\sum_{s=0}^{t-1}(-1)^{t-1-s}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}\binom{l_i}{t}\binom{t-1}{s}\frac{(l_i-1-s)!}{q_{l_i-1-s}^{(m+2)}!}x_i^s\partial_{y_i}^{\langle l_i-1-s\rangle_{(m+2)}} \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités 1.2.1, on voit que, pour tout $t\leq l_i$ et pour tout $s\leq t-1$:

$$C(l_i,m,s) = v_p\left(p^{\nu_m(l_i)}\frac{(l_i-1-s)!}{q_{l_i-1-s}^{(m+2)}!}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}p^{-\nu_{m+2}(s)}\right)$$

est minoré par

$$\frac{l_i}{p^{m+1}}+\left(\frac{l_i-1-s}{p-1}-\log_p(l_i-s)-1\right)-\frac{l_i-1-s}{p^{(m+2)}(p-1)}-\frac{l_i-s}{p-1}-\frac{s}{p^{m+3}}-1.$$

En majorant $\log_p(l_i-s)$ par $\log_p(l_i)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
C(l_i,m,s) &\geq \frac{l_i}{p^{m+1}}-\frac{s}{p^{m+3}}-\log_p(l_i)+\frac{-l_i+1+s}{p^{m+2}(p-1)}-3\\
&\geq \left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{l_i}{p^{m+1}}+\frac{1}{p(p-1)}\frac{s}{p^{m+2}}-\log_p(l_i)-3\\
&\geq \left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{l_i}{p^{m+1}}-\log_p(l_i)-3.
\end{aligned}$$

Soit c_1 un minorant de cette quantité pour tout $l_i\in\mathbf{N}^*$. On dispose de même de l'inégalité :

$$v_p\left(p^{\nu_m(l_i)}\frac{l_i!}{q_{l_i}^{(m+2)}!}\frac{1}{\pi^{l_i}}\right)\ \geq\ \left(1-\frac{1}{p(p-1)}\right)\frac{l_i}{p^{m+1}}-\log_p(l_i+1)-1\geq c_1.$$

Soit $c=\min\{c_1,0\}$. Pour tout $l_i\geq 1$, considérons maintenant les opérateurs de $\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ définis par :

$$Q_{l_i}=p^{\nu_m(l_i)}\sum_{t=1}^{l_i}\sum_{s=0}^{t-1}\binom{l_i}{t}\binom{t-1}{s}(-1)^{t-1-s}\frac{1}{\pi^{l_i-s}}x_i^s\partial_{y_i}^{l_i-s-1},$$

et

$$R_{l_i}=p^{\nu_m(l_i)}\frac{1}{\pi^{l_i}}\partial_{y_i}^{l_i}.$$

On pose aussi $Q_0=0$ et $R_0=1$. Ces opérateurs définissent des éléments de $A^{(m+2)}$ via le morphisme composé :

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(Z,\mathscr{D}'^{(m)}_Z) & \to & \mathscr{D}'^{(m)}_{Y\leftarrow Z}(\infty) & \to & A^{(m+2)}\\
 & & P & \mapsto & (1\otimes 1)\cdot P,
\end{array}$$

que nous noterons toujours Q_{l_i} et R_{l_i}. D'après ce que l'on vient de voir, les opérateurs $p^cQ_{l_i}$ et $p^cR_{l_i}$ sont dans $A^{(m+2)}$ et dans $A_i^{(m+2)}$ respectivement, et on a l'égalité :

$$p^cp^{\nu_m(l_i)}x_i^{l_i}=p^cQ_{l_i}*(\partial_{y_i}+\pi x_i)+p^cR_{l_i}.$$

Soit $P\in A^{(m)}$ tel que P s'écrive $P=\sum_{\underline{l},\underline{k}}p^{\nu_m(|\underline{l}|)}\underline{x}^{\underline{l}}p_{\underline{l},\underline{k}}\underline{\partial}_{\underline{y}}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}$. Posons

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= p^c\sum_{\underline{l},\underline{k}}p^{\nu_m(|\underline{l}|)-\nu_m(l_i)}Q_{l_i}p_{\underline{l},\underline{k}}\underline{\partial}_{\underline{y}}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}},\\
\psi(P) &= p^c\sum_{\underline{l},\underline{k}}p^{\nu_m(|\underline{l}|)-\nu_m(l_i)}R_{l_i}p_{\underline{l},\underline{k}}\underline{\partial}_{\underline{y}}^{\langle\underline{k}\rangle_{(m)}}.
\end{aligned}$$

Les applications φ et ψ ont alors les propriétés voulues. Achevons la démonstration de l'existence. Soit $P \in A$, alors il existe $m \subset \mathbf{N}$ tel que $P \in \hat{A}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$. Complétons les applications que nous venons de construire en $\hat{\varphi}$ et en $\hat{\psi}$ et tensorisons par $\mathbf{Q}$. Nous avons alors l'égalité :

$$p^c P = \hat{\varphi}(P)_*(\partial_{y_i} + \pi x_i) + \hat{\psi}(P).$$

En multipliant par p^{-c}, on trouve la décomposition cherchée.

Au passage, on voit que si P ne dépend pas de x_t, c'est aussi le cas du quotient Q et du reste R. Notons $T_i = \partial_{y_i} + \pi x_i$ et (P/T_i) le quotient donné par le lemme de division.

4.3.2.11 Lemme. *Fixons $I = (i_1, \ldots, i_l)$. Alors tout opérateur P de A se décompose d'une unique façon :*

$$P = \sum_{J \subset I} P_{J*} \prod_{j \in J} T_j,$$

où $\forall s \in I \backslash J$, $(P_J/T_s) = 0$.

Démonstration. Comme les opérateurs T_i commutent entre eux d'après la remarque précédente, il suffit d'appliquer successivement le lemme de division pour l'existence d'une telle décomposition et son unicité. Au passage, on observera que l'application $P \mapsto P_{\underline{j}}$ est linéaire, si $\underline{i}$ est fixé. On la notera $\beta_{\underline{j}}^{\underline{i}}$: l'élément $\beta_{\underline{j}}^{\underline{i}}(P)$ est donc un élément de A qui ne dépend que de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}$.

4.3.2.12 Proposition. *Le complexe $L_\bullet$ est acyclique en degrés strictement négatifs.*

Démonstration. Nous noterons

$$e_{\underline{i}} = \partial_{y_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{y_{i_n}},$$

pour tout multi-indice $\underline{i}$ de longueur n. L'assertion est locale et on peut travailler sur un ouvert $\mathcal{V}_j$. Nous sommes donc dans la situation du lemme de décomposition précédent.

Définissons des opérateurs K-linéaires $k_n : L_n \to L_{n+1}$ par :

$$k_n(Pe_{i_1,\ldots,i_n}) = \sum_{j=1}^{N} (P/T_j)\partial_{y_j} \wedge e_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Nous avons alors les relations suivantes :

$$d_n k_n(Pe_{i_1,\ldots,i_n}) = \sum_{j=1}^{N} (P/T_j)_* e_{i_1,\ldots,i_n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (P/T_j)_* T_k \partial_{y_j} \wedge e_{i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_n},$$

$$k_{n-1} d_{n-1}(P) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (P_* T_k/T_j) \partial_{y_j} \wedge e_{i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_n}.$$

En remarquant que (P_*T_k/T_j) est égal à $(P/T_j)_*T_k$, si $i \neq k$, on en conclut que :

$$d_nk_n + k_{n-1}d_{n-1}(P\,e_{\underline{i}}) = \left((N-n)P + \sum_{j\notin\{i_1,\dots,i_n\}} (P/T_j)_*T_j\right) e_{\underline{i}}.$$

Considérons maintenant $\lambda_n = N \cdot id - (d_n \circ k_n + k_{n-1} \circ d_{n-1})$. D'après ce que l'on vient de voir, λ_n est K-linéaire et

$$\lambda_n(Pe_{\underline{i}}) = \left(\sum_{j\notin\{i_1,\dots,i_n\}} P - (P/T_j)_*T_j\right) e_{\underline{i}}.$$

En fait λ_n est diagonalisable. Soit $\underline{i} \in \mathbf{N}^n$, notons $\underline{i}^c$ le multi-indice complémentaire $\{1,\dots,N\}\backslash\{i_1,\dots,i_n\}$ et soit $l \leq N-n$. On prolonge l'application $\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}$ obtenue à partir du lemme de décomposition en posant :

$$\beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(\sum_{\underline{i}'} P_{\underline{i}'}e_{\underline{i}'}) = \sum_{\underline{i}'} \beta^{\underline{i}}_{\underline{j}}(P_{\underline{i}'})e_{\underline{i}'}.$$

Soit enfin

$$E_l = \{P \in L_n \text{ tels que, } \forall \underline{j} \text{ avec } |\underline{j}| \neq N-(l+n) \text{ et } \forall \underline{i} \text{ avec } |\underline{i}| = n,\ \beta^{\underline{i}^c}_{\underline{j}}(P_{\underline{i}}) = 0.\}$$

En d'autres termes, on demande que $P_{\underline{i}}$ s'écrive $\sum_{|\underline{j}|=N-l-n} P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{j_1}\cdots T_{j_{N-l-n}}$ où $P_{\underline{i},\underline{j}}$ ne dépend pas des x_k tels que $k \in \{\underline{i}^c\backslash\underline{j}\}$. Observons alors que, avec ces notations :

$$\text{si } k \in \{j_1,\dots,j_{N-l-n}\},\ P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}} - (P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}}/T_k)_*T_k = 0,$$

$$\text{si } k \notin \{j_1,\dots,j_{N-l-n}\},\ P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}} - (P_{\underline{i},\underline{j}}T_{\underline{j}}/T_k)_*T_k = P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}}.$$

Finalement, si $P \in E_l$, $\lambda_n(P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}}\,e_{\underline{i}}) = l\,P_{\underline{i},\underline{j}*}T_{\underline{j}}\,e_{\underline{i}}$ et $\lambda_n(P) = l\,P$, de sorte que E_l est le sous-espace propre associé à la valeur propre l. D'autre part, il découle du lemme de décomposition que L_n est égal à la somme directe des E_l. Soit maintenant $C_n = \ker d_{n-1}$, $B_n = \operatorname{Im} d_n$ et $P \in C_n$, dont les composantes sur E_l sont notées P_l. On dispose alors du lemme suivant :

4.3.2.13 Lemme. *Soit $P \in C_n$. Alors, $\forall l \in \{0,\dots,N-n\}$, $P_l \in C_n$.*

Démonstration. Tout d'abord si $d_{n-1}(P) = 0$, alors on a les égalités : $d_{n-1} \circ \lambda_n(P) = Nd_{n-1}(P) - d_{n-1} \circ d_n \circ k_n(P) = 0$ et donc $\lambda_n(C_n) \subset C_n$. Finalement $\lambda^k_n(P)$ appartient à C_n, pour tout $k \in \mathbf{N}$. On a donc :

$$\begin{cases} P & = P_0 + \ldots + P_{N-n} \quad \in C_n \\ \lambda_n(P) & = P_1 + \cdots + (N-n)P_{N-n} \quad \in C_n \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \lambda_n^{N-n}(P) & = P_1 + \cdots + (N-n)^{N-n}P_{N-n} \quad \in C_n. \end{cases}$$

Soit B la matrice $(N-n+1) \times (N-n+1)$ à coefficients dans K :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & N-n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 1 & 2^{N-n} & \cdots & (N-n)^{N-n} \end{bmatrix}$$

La matrice ${}^tB$ est inversible dans K d'inverse $A = (a_{i,j})$. Alors, $\forall i \in \{0, \ldots, N-n\}$, on a l'égalité : $P_i = \sum_{j=0}^{N-n} a_{i,j}\lambda^j(P)$ où $a_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Ceci montre le lemme.

Terminons la démonstration de la proposition. Soit $P \in C_n$, avec $n \geq 1$. Alors $k_{n-1} \circ d_{n-1}(P_l) + d_n \circ k_n(P_l)$ est égal à $d_n \circ k_n(P_l)$ et aussi à $NP_l - lP_l = (N-l)P_l$. Or $l \leq N-1$, donc $N - l \neq 0$ et ceci montre que $P_l \in B_n$, pour tout l. C'est donc aussi le cas de P. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

4.3.2.14 Proposition. *Le complexe $\mathscr{F}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ est dans $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$. C'est un complexe acyclique sauf en degré $2-N$ où il est isomorphe à $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$. En outre, il existe un isomorphisme canonique $A_N(K)^\dagger$-linéaire :*

$$F(\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))) \simeq \Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{F}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)))[2-N].$$

Démonstration. Le fait que le complexe $\mathscr{F}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ soit acyclique en degrés distincts de $2-N$ résulte de la proposition précédente. Le complexe $L_\bullet$ fournit une résolution $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire de $\mathscr{F}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$, qu'on regarde maintenant comme un complexe concentré en degré zéro $\mathscr{G}$:

$$p_{2*}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))^N \xrightarrow{u} p_{2*}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty) \to \mathscr{G} \to 0.$$

Plaçons-nous sur un ouvert $\mathscr{V}_j$. D'après le lemme de décomposition 4.3.2.11, l'application $\beta_\emptyset^{\{1,\ldots,N\}}$ est une application $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire surjective : $p_{2*}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty) \to$

$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathcal{V}_j)$. Il est clair que toutes ces applications se recollent en une aplication $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire $v : p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty) \to t(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$, où $t(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$ est isomorphe comme groupe abélien à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$ et dont la structure de module à gauche est donnée par la multiplication à droite par l'opérateur adjoint (puisque cette structure est héritée de celle de $p_{2*}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$). De plus, le noyau de v est précisément $\operatorname{Im} u$, toujours d'après le lemme de décomposition 4.3.2.11. Finalement, on en déduit un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire $\mathcal{G} \xrightarrow{v} t(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$. En particulier, ce module est isomorphe à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$ via l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty) & \xrightarrow{\psi} & t(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)) \\ P & \mapsto & P\cdot 1. \end{array}$$

Par la suite, nous identifierons ces deux modules via ψ. Via cette identification, $\mathcal{F}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ est muni d'une structure d'anneau.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, le choix de la section 1 de $\mathcal{L}_\pi$ induit un morphisme α fonctoriel en $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{X},\mathcal{M}) & \to & \Gamma(\mathcal{Z},\lambda^!\mathcal{L}_\pi[2-2N]\otimes\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)} p_1^{-1}\mathcal{M}) \\ m & \mapsto & 1\otimes 1\otimes m. \end{array}$$

Grâce au choix des coordonnées, ce morphisme induit finalement un morphisme α', fonctoriel en $\mathcal{M}$:

$$\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{M}) \to \Gamma(\mathcal{Y},p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathcal{L}_\pi[2-2N]\otimes\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)}p_1^{-1}\mathcal{M})))$$

avec l'identification faite plus haut.

Dans le cas de $\mathcal{M} = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, le module $p_{2*}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbf{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathcal{L}_\pi[2-2N]\otimes\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)} p_1^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ est précisément $\mathcal{F}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ d'après 4.3.2.12. Et le but de α' est identifié à $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$.

Montrons maintenant que α' est un homomorphisme d'anneaux. D'après les résultats 4.4.5 à 4.4.12 de [6], il existe une suite d'entiers (n_m), et une filtration de $\lambda^!\mathcal{L}_\pi[2-2N]$ par des $\hat{\mathcal{B}}^{n_m+1}_{\mathbf{Q}}$- modules cohérents $\mathcal{F}^{(m)}$, qui soient des $\hat{\mathcal{B}}^{n_m+1}\hat{\otimes}_{\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z},\mathbf{Q}}$-modules cohérents. Dans la suite de ce paragraphe, nous noterons $\mathcal{D}'^{(m)}Z(\infty) = \hat{\mathcal{B}}^{n_m+1}\otimes_{\mathcal{B}^{(m)}_Z}\mathcal{D}^{(m)}_Z(\infty)$ et ainsi de suite pour tous les modules que nous avons construits jusqu'à présent. Nous pouvons faire cette construction pour m assez grand de telle façon que la section de $\lambda^!\mathcal{L}_\pi$ notée 1 que nous avons choisie soit aussi une section de $\mathcal{F}^{(m)}$. L'homomorphisme α' provient alors d'homomorphismes α'_m :

$$\Gamma(\mathcal{X},\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)) \to \Gamma(\mathcal{Y},p_{2*}\hat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{\mathcal{Y}\leftarrow\mathcal{Z}}(\infty)\otimes\mathcal{F}^{(m)}\otimes\hat{\mathcal{D}}'^{(m)}_{\mathcal{Z}\to\mathcal{X}}(\infty)).$$

Il en résulte que l'application α' est continue.

D'autre part, il est évident que $\alpha'(1) = 1$. Considérons l'anneau des endomorphismes $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaires à gauche de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$; il s'identifie à $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ opérant à droite sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, via $u \mapsto u(1)$ si $u \in End_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. Nous procédons de même pour $\mathscr{Y}$. Puisque α' est fonctoriel en $\mathscr{M}$, α' induit un homomorphisme d'anneaux entre ces anneaux d'endomorphismes. Du fait que $\alpha'(1) = 1$, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} End_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)) & \xrightarrow{\alpha'} & End_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)) & \xrightarrow{\alpha'} & \Gamma(\mathscr{Y}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)). \end{array}$$

Autrement dit α' est linéaire pour l'action de $\mathscr{E}nd_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)}$. Par continuité de α', il suffit donc de calculer $\alpha'(x_i)$ et $\alpha'(\partial_{x_i})$. Or, $\alpha(x_i)$ est égal à x_i et donc $\alpha'(x_i) = \psi^{-1}(\partial_{y_i}/\pi) = -\partial_{y_i}/\pi = F(x_i)$. D'autre part, $\alpha(\partial_{x_i})$ est égal à $\partial_{x_i} + \pi y_i$ et donc $\alpha'(\partial x_i) = \pi y_i = F(\partial_{x_i})$.

4.3.2.15 Corollaire. *(i) Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ est concentré en degré $2-N$ et est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent.*

(ii) Si $\mathscr{M}$ est dans $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, alors $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ est dans $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$.

Démonstration. Par dévissage, il suffit bien sûr de montrer (i). D'après 3.3.4.1, il existe une résolution $\mathscr{E}_\bullet$ de $\mathscr{M}$ par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres de type fini qui correspond à une résolution libre de type fini $E_\bullet$ de $\Gamma(\mathscr{X}, \mathscr{M})$. Deux telles résolutions sont quasi-isomorphes. Posons $\mathscr{E}_i \simeq (\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))^{a_i}$. Comme p_1 est lisse, le foncteur $p_1^![-N]$ est exact, de sorte qu'il existe une suite exacte $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire, où chaque complexe est concentré en degré zéro :

$$\ldots \to p_1^!\mathscr{E}_n[-N] \to \ldots \to p_1^!\mathscr{E}_0[-N] \to p_1^!\mathscr{M}[-N] \to 0.$$

Comme le produit tensoriel par $\lambda^!\mathscr{L}_\pi[2-2N]$ est exact, on en tire une résolution $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire :

$$\ldots \to \lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes p_1^!\mathscr{E}[2-3N] \to \ldots \lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes p_1^!\mathscr{E}[2-3N] \to \lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes p_1^!\mathscr{M}[2-3N] \to 0.$$

Soit $C_{\bullet\bullet}$ un bi-complexe qui soit une résolution plate de ce complexe par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche. Les éléments $C_{i,j}$ de $C_{\bullet\bullet}$ sont numérotés avec $i, j \leq 0$. Le complexe $C_{i,\bullet}$ est une résolution plate de $\lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes p_1^!\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty)^{a_i}[2-3N]$, par hypothèse. Le complexe $C'_{\bullet\bullet} = (\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)} C_{\bullet\bullet})$ calcule donc $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y}\leftarrow\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)} (\lambda^!\mathscr{L}_\pi \tilde{\otimes} p_1^!\mathscr{M})[2-$

$N]$. Soit maintenant $D_{\bullet\bullet\bullet}$ une résolution de $C_{\bullet\bullet}$ par des $p_2^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche injectifs. Le complexe $p_{2*}D_{\bullet\bullet\bullet}$ calcule $\mathcal{F}(\mathcal{M})[2-N]$. Les sous-complexes $p_{2*}D_{i,\bullet\bullet}$ calculent $\mathcal{F}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))^{a_i}[2-N]$. D'après 4.3.2.12, ces sous-complexes sont acycliques sauf en degré zéro. Le complexe $\mathcal{F}(\mathcal{M})[2-N]$ est donc quasi-isomorphe au complexe $D'_\bullet$:

$$\ldots \to \mathcal{F}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))^{a_n}[2-N] \to \ldots \to \mathcal{F}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))^{a_0}[2-N] \to 0.$$

En particulier, le complexe $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est à cohomologie cohérente. Pour le calculer, il suffit donc de passer aux sections globales de $D'_\bullet$. Mais d'après la fin de la proposition précédente, le complexe $\Gamma(\mathcal{Y}, D'_\bullet)$ est isomorphe au complexe $F(\mathcal{E}_\bullet)$. En particulier, il est acyclique en degrés différents de zéro, si bien que $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est un complexe réduit en degré $2-N$ à un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent. En outre, cela montre que l'on peut prolonger l'homomorphisme α' introduit en 4.3.2.14 en le définissant terme à terme pour les éléments de la résolution $F(E_i)$ comme étant égal à une somme directe d'homomorphismes α'. Cet homomorphisme induit alors un isomorphisme : $\mathrm{F}(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \to \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F}(\mathcal{M}))[2-N]$.

4.3.2.16 Théorème. *Si $\mathcal{M} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, il existe un isomorphisme canonique dans $D^b_{coh}(A_N(K)^\dagger)$:*

$$F(\mathbf{R}\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F}(\mathcal{M}))[2-N].$$

Démonstration. D'après 3.3.4.1, si $\mathcal{M} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, il existe une résolution $\mathcal{E}_\bullet$ de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres de rang fini, deux telles résolutions étant quasi-isomorphes. Le même raisonnement qu'en 4.3.2.15 montre que le complexe $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ est calculé par le complexe $\mathcal{F}(\mathcal{E}_\bullet)$ et que le complexe $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F}(\mathcal{M}))$ est calculé par le complexe $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{E}_\bullet)$. On définit alors α'' en prenant terme à terme l'application α' décrite à la fin de la démonstration de 4.3.2.14 : $F(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}_n) \to \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{F}(\mathcal{E}_n))[2-N]$. Le fait que α' est un isomorphisme se vérifie alors par dévissage pour les modules cohérents placés en degré zéro, ce qui résulte de la démonstration précédente.

4.4 Comparaison avec la transformation de Fourier à support compact

4.4.1 Introduction et définitions. Nous considérons toujours la situation :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{Z} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathscr{X} \arrow[dr] & & \mathscr{Y} \arrow[dl] \\ & \mathscr{S}, & \end{tikzcd}$$

où l'on dispose sur $\mathscr{Z}$ d'un module exponentiel $\lambda^!\mathscr{L}_\pi$, comme introduit en 4.2. Soit Z' le schéma Z, muni du diviseur d'équation $v_0 = 0$. On introduit le faisceau d'algèbres $\mathscr{B}_{Z'}^{(m)}$ relatif à ce diviseur et la deuxième projection p_2', vue comme morphisme d'espaces annelés : $(Z', \mathscr{B}_{Z'}^{(m)}) \to (Y, \mathscr{B}_Y^{(m)})$. Comme le morphisme des schémas sous-jacents est propre et qu'il existe un isomorphisme $\mathscr{B}_{Z'}^{(m)} \to p_2^*\mathscr{B}_Y^{(m)}$, nous sommes en situation d'appliquer le théorème de dualité globale 5.4 de [19]. Nous construisons sur Z' et sur le schéma formel associé $\mathscr{Z}'$ les faisceaux d'opérateurs différentiels à singularités surconvergentes le long du diviseur d'équation $v_0 = 0$: $\mathscr{D}_{Z'}^{(m)}(\infty)$, $\hat{\mathscr{D}}_{\mathscr{Z}'}^{(m)}(\infty)$ son complété p-adique et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}',\mathbf{Q}}(\infty)$. Tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module peut bien sûr être regardé comme un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}',\mathbf{Q}}(\infty)$-module, par l'homomorphisme de restriction des scalaires ρ_*. Rappelons enfin que, comme nous l'avons remarqué à la fin de la démonstration de 1.6.5.3, les faisceaux d'anneaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}',\mathbf{Q}}(\infty)$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$ sont de dimension cohomologique finie inférieure à $4N$. En particulier, les catégories $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$ et $D^b_{parf}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$ coïncident. Si $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$, on pose

$$\mathbf{D}_{\mathscr{Z}}(\mathscr{M}) = \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{M}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)) \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathscr{Z}}^{-1}[2N].$$

Cela signifie que l'on a tordu la structure naturelle de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-module à droite du complexe de modules $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{M}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty))$ donnée par la multiplication à droite par les éléments de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$, pour retrouver un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche.

Nous montrerons ultérieurement en 4.4.2.5 que si $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, alors $\rho_*\mathbf{D}_{\mathscr{Z}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi \tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z},\mathbf{Q}}} p_1^!\mathscr{M}) \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Z}',\mathbf{Q}}(\infty))$. C'est est un résultat analogue à ce qui se passe en caractéristique 0, (cf le lemme 1.4 de [17]). et cela justifie la définition suivante pour $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbf{Q}}(\infty))$:

$$\mathscr{F}_!(\mathscr{M}) = p'_{2+} \circ \mathbf{D}_{\mathscr{Z}'} \circ \rho_* \circ \mathbf{D}_{\mathscr{Z}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi \tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathscr{Z}}} p_1^!\mathscr{M}).$$

L'objet de cette partie est alors de construire pour $\mathscr{M} \in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ un isomorphisme canonique : $\mathscr{F}_!(\mathscr{M}) \to \mathscr{F}(\mathscr{M})$. Le point clé est la construction de résolutions explicites de $\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi \tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} p_1^! \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ sur tout ouvert affine $\mathscr{W}_{i,j} = \mathscr{U}_i \times \mathscr{V}_j$, ce qui permet de comparer les duaux de ce complexe sur $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$.

4.4.2 Calcul de $\mathscr{F}_!(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. Posons $\mathscr{G} = \lambda^!\mathscr{L}_\pi \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X}}} p_1^! \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)[2-3N]$. D'après 4.3.2.2, c'est un complexe à cohomologie $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-cohérente, réduit à un module placé en degré 0. Une résolution en est fournie par le complexe $K'_\bullet$ décrit en 4.3.2.2, qu'on réindexera en posant $K'^n = K'_{-n}$, de sorte que $K'^\bullet$ est placé en degrés variant de $-N$ à 0.

4.4.2.1 Proposition. *Le complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules $\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{G})$ est acyclique en degrés différents de $-N$.*

Le terme général K'^{-n} du complexe $K'^\bullet$ est le $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module induit $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \mathscr{L}_\pi \otimes \bigwedge^n \tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}}$. En général, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module localement libre de rang fini, il existe un isomorphisme $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire à droite :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}^* \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) & \to & \mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \mathscr{F}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)) \\ u \otimes Q & \mapsto & P \otimes f \mapsto Pu(fQ), \end{array}$$

où $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}}(\mathscr{F}, \mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}})$. Soit $C^\bullet$ le complexe $\mathscr{H}om^\bullet_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(K'^\bullet, \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$: c'est un complexe dont les termes sont situés en degrés compris entre 0 et N, et dont le terme général C^n est isomorphe à $\bigwedge^n \tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \otimes \mathscr{L}^*_\pi \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Identifions globalement sur $\mathfrak{X}$, $\tilde{\mathscr{T}}_{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}$ à un $\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$-module libre de base $(f_1, \dots, f_N)$, $\mathscr{L}^*_\pi$ à $\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$. Alors le complexe $C^\bullet$ est un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à droite libres de type fini dont la différentielle d_n est donnée par la formule :

$$d_n(f_{i_1,\dots,i_N} P) = \sum_{l=1}^{n} f_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_n}(-1)^{l-1}(\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l})P.$$

Rappelons maintenant qu'il existe un isomorphisme canonique qui échange les deux structures gauches de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules : $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathfrak{X}} \simeq \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) \otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$, correspondant localement au passage à l'opérateur adjoint. En utilisant cet isomorphisme et en identifiant $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$ à $\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$, on voit que $\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{G})$ est représenté par un complexe $C'^\bullet$ de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules à gauche cohérents, placé en degrés variant de $-2N$ à $-N$, et dont le terme général est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module libre et dont la différentielle est donnée par la formule :

$$d'_n(P f_{i_1,\dots,i_N}) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}P(-\partial_{y_{i_l}} + \pi x_{i_l})f_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_n}.$$

Il suffit de vérifier sur l'ouvert $\mathscr{W}$ que ce complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules cohérents est acyclique en degrés différents de $-N$. Introduisons sur l'ouvert rigide $]U[$ (où $\mathscr{U}$ est l'ouvert complémentaire du diviseur que nous considérons sur l'espace projectif formel de dimension 1 : $\mathscr{T}$), le module à connexion $M_{-\pi}$, dont le $\mathcal{O}_{]U[}$-module sous-jacent est $\mathcal{O}_{]U[}$ et dont la connexion est : $\nabla(f) = df/dt + \pi f$. Cette connexion est en fait convergente sur $]U[$ par le même calcul que celui effectué en 1.5.3 [3], et l'image directe par spécialisation de $M_{-\pi}$ définit un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$-module cohérent : $\mathscr{M}_{-\pi}$. Le même calcul qu'en 4.3.2.2 montre que le complexe $C'^{\bullet}$ peut être vu sur $\mathscr{W}$ comme le complexe $\lambda^!\mathscr{M}_{-\pi} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_W} p_1^! \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)[2-2N]$. Mais ce complexe est acyclique en degrés différents de $-N$ car le faisceau $\mathscr{M}_{-\pi}$ est un $\mathcal{O}_{\mathscr{W}}$-module isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathscr{W}}$, donc plat sur $\mathcal{O}_{\mathscr{W}}$. D'où la proposition.

Pour la suite, retenons qu'il existe une résolution $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-linéaire à droite de $\mathscr{E} = \mathscr{E}xt^N_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\mathscr{G}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)^N & \to & \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty) & \to & \mathscr{E} \to 0 \\ P_l & \mapsto & \sum_{l=1}^{N}(\partial_{y_l} + \pi x_l)P_l. & & \end{array}$$

Nous procédons maintenant à une étude locale. Plaçons-nous sur $\mathscr{W}_{i,j} = \mathscr{U}_i \times \mathscr{V}_j$ et introduisons $E = \Gamma(\mathscr{W}_{i,j}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ et $E' = \Gamma(\mathscr{W}_{i,j}, \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty))$. Les coordonnées u_l/u_i et v_l/v_j seront notées x'_l et y'_l. En particulier x'_0 est égal à x_i^{-1}. Nous supposons de plus que $i \neq 0$. En effet, si $i = 0$, les faisceaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$ coïncident sur $\mathscr{W}_{i,j}$ et le module $\mathscr{E}$ est alors un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent sur $\mathscr{W}_{i,j}$.

4.4.2.2 Lemme. *Sur $\mathscr{W}_{i,j}$, les idéaux à droite de E engendrés respectivement par les éléments $\{\partial_{y_l} + \pi x_l\}_{1\le l\le N}$ et par les éléments $\{\partial_{y_l} x'_0 + \pi x'_l\}_{1\le l\le N}$ sont égaux.*

Démonstration. Il suffit de constater que les fonctions x_i et x_i^{-1} sont des éléments de E et que nous avons la relation, pour tout $1 \le l \le N$:

$$(\partial_{y_l} x'_0 + \pi x'_l)x_i = \partial_{y_l} + \pi x_l.$$

4.4.2.3 Lemme. *(i) Soit $P \in E$, alors il existe un couple $(Q, R) \in E \times E'$, tel que*

$$P = (\partial_{y_i} x'_0 + \pi)Q + R.$$

(ii) De plus, si $(\partial_{y_i} x'_0 + \pi)Q \in E'$, alors $Q \in E'$.

Démonstration. Commençons par remarquer que la décomposition donnée par (i) n'est pas unique puisque $(\partial_{y_i} x'_0 + \pi)E' \subset E'$. Montrons d'abord (ii). Introduisons $F = \Gamma(\mathscr{U}_i \times (\bigcap_{j=0}^N \mathscr{V}_j), \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ et $F' = \Gamma(\mathscr{U}_i \times (\bigcap_{j=0}^N \mathscr{V}_j, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty))$. Le morphisme de restriction induit des injections : $E \hookrightarrow F$ et $E' \hookrightarrow F'$. D'autre part, si un opérateur Q est dans $E \bigcap F'$, il est dans E'. Cela nous ramène finalement à montrer le fait suivant : soit $Q \in F$ tel que $(\partial_{y_i} x'_0 + \pi)Q \in F'$, alors $Q \in F'$. Introduisons les ensembles d'indices

$$I = \left\{ \begin{array}{l} (\underline{l}, \underline{k}) \text{ tels que } \underline{k} \in \mathbf{N}^{2N}, \text{ et } \underline{l} = \underline{l}' \cup \underline{l}'',\ \underline{k} = \underline{k}' \cup \underline{k}'',\ \underline{l}' = (l'_0, \dots, \hat{l}'_i, \dots, l'_N), \\ \underline{l}'' = (l''_1, \dots, , l''_N), \text{ où } \underline{l}' \in \mathbf{Z}^N,\ \underline{k}' \in \mathbf{N}^N, \text{ et } \underline{l}'' \in \mathbf{Z}^N,\ \forall i \geq 1, l'_i \in \mathbf{N} \text{ et } l'_0 \in \mathbf{Z}. \end{array} \right\}$$

et

$$I' = \{(\underline{l}, \underline{k}) \in I \text{ tels que } l'_0 \in \mathbf{N}\}.$$

Alors, nous disposons des descriptions suivantes de F et de F' :

$$F = \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{(\underline{l},\underline{k}) \in I} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}'^{\underline{l}'} \underline{y}^{\underline{l}''} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{k}']} \underline{\partial}_{y}^{[\underline{k}'']} & | & a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathscr{V} \text{ et } |a_{\underline{l},\underline{k}}| \to 0 \text{ si } |\underline{l}| + |\underline{k}| \to \infty, \\ \exists C > 0, \eta < 1 & | & |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{|\underline{k}| - \min\{0, -l'_0\}}, \end{array} \right\},$$

et

$$F' = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(\underline{l},\underline{k}) \in I'} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}'^{\underline{l}'} \underline{y}^{\underline{l}''} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{k}']} \underline{\partial}_{y}^{[\underline{k}'']} \mid a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathscr{V} \quad \text{et} \quad \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{|\underline{k}|} \\ \qquad\qquad\qquad |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p \to 0 \text{ si } |\underline{l}| + |\underline{k}| \to \infty \end{array} \right\}.$$

On remarque que tout $Q \in F$ s'écrit $Q = (x'_0)^{-1}Q_1 + Q_2$ où $Q_2 \in F'$, et $Q_1 \in F$ est tel que ses coefficients $q_{\underline{l},\underline{k}}$ soient nuls si $l'_0 > 0$. L'opérateur $(\partial_{y_i} x'_0 + \pi)Q$ est dans F' si et seulement si $(\partial_{y_i} + \pi x_i)Q_1$ est dans F'. En calculant les coefficients $t_{\underline{l},\underline{k}}$ de cet opérateur, et en écrivant qu'il est dans F' si et seulement si $t_{\underline{l},\underline{k}} = 0$ si $l'_0 \leq -1$, on trouve la condition suivante :

$$(3) \quad \forall \underline{l}, \underline{k} \text{ tels que } l'_0 \leq -1,\ k''_i q_{\underline{l},\underline{k}-1''_i} + (l''_i + 1) q_{\underline{l}+1''_i,\underline{k}} + \pi q_{\underline{l}+1'_0,\underline{k}} = 0.$$

Posons alors $s_{\underline{l}',\underline{k}} = \sum_{\underline{l}'' \in \mathbf{Z}^N} q_{\underline{l}' \cup \underline{l}'',\underline{k}} \underline{y}^{\underline{l}''} \in \mathscr{V}\{y_l, 1/y_l\}_{1 \leq l \leq N} \otimes K$. La norme spectrale de $s_{\underline{l}',\underline{k}}$ vérifie :

$$|s_{\underline{l}',\underline{k}}|_{sp} \leq C\eta^{|\underline{k}| - \min\{0, -l'_0\}}.$$

Supposons que Q_1 soit non nul et choisissons $(\underline{l}', \underline{k})$ tel que $s_{\underline{l}',\underline{k}}$ soit non nul. Prenons a minimal tel que pour $n < a$, $s_{\underline{l}',\underline{k}-(k''_i-n)1''_i}$ soit nul pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\underline{l}'$ (éventuellement $a = 0$.) La relation (3) implique alors

$$(4) \quad \forall l'_0 \leq -1,\ \frac{\partial s_{\underline{l}'-1'_0,\underline{k}}}{\partial y_i} + \pi s_{\underline{l}',\underline{k}} = 0.$$

Cette relation est identique, au signe près à la relation (2) de 4.3.2.9. De plus, nous avons la même inégalité sur la norme spectrale que pour les fonctions u_c. La différence de signe dans la relation (4) ne change pas la conclusion de la partie unicité de 4.3.2.9 et pour tout $(\underline{l}', \underline{k})$, $s_{\underline{l}',\underline{k}} = 0$, ce qui signifie que $Q_1 = 0$ et que $Q \in F'$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Montrons maintenant l'existence d'une décomposition comme annoncée en (i). Nous avons la description suivante de E :

$$E = \left\{ \begin{array}{lll} \sum\limits_{(\underline{l},\underline{k}) \in I} a_{\underline{l},\underline{k}} \underline{x}'^{\underline{l}'} \underline{y}'^{\underline{l}''} \underline{\partial}_{x'}^{[\underline{k}']} \underline{\partial}_{y'}^{[\underline{k}'']} & | & a_{\underline{l},\underline{k}} \in \mathcal{V},\ |a_{\underline{l},\underline{k}}| \to 0 \text{ si } |\underline{k}| + |\underline{l}| \to \infty \\ & & \text{et} \quad \exists C > 0, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l},\underline{k}}|_p < C\eta^{\underline{k} - \min\{0, l_0'\} - \min\{0, l_0''\}} \end{array} \right\}.$$

On procède comme pour la partie existence de 4.3.2.9. Soient $E^{(m)} = \Gamma(W_{i,j}, \mathscr{D}_Z^{(m)}(\infty))$ et $E'^{(m)} = \Gamma(W_{i,j}, \mathscr{D}_{Z'}^{(m)}(\infty))$. Pour montrer l'existence d'une décomposition comme en (i), il suffit de montrer qu'il existe $c \in \mathbf{N}$, deux applications linéaires $\varphi \colon E^{(m)} \to E^{(m+2)}$ et $\psi \colon E'^{(m)} \to E'^{(m+2)}$, telles que l'on ait l'égalité dans E :

$$\forall Q \in E^{(m)},\ p^c Q = (\partial_{y_i} x_0' + \pi)\varphi(Q) + \psi(Q).$$

Nous procédons comme suit. Puisque les éléments $(\partial_{y_i} + \pi x_i)$ et ∂_{y_i} commutent dans E, nous avons l'égalité : (on gardera à l'esprit que l_0' est négatif)

$$\begin{aligned} x_i^{-l_0'} &= \frac{(-1)^{-l_0'}}{\pi^{-l_0'}} (-(\partial_{y_i} + \pi x_i) + \partial_{y_i})^{-l_0'} \\ &= \frac{(-1)^{l_0'}}{\pi^{-l_0'}} \partial_{y_i}^{-l_0'} + (\partial_{y_i} + \pi x_i) \sum_{t=1}^{-l_0'} \sum_{s=0}^{t-1} (-1)^{t-l_0'} \frac{1}{\pi^{-l_0'-s}} \binom{-l_0'}{t} \binom{t-1}{s} x_i^s \partial_{y_i}^{-l_0'-1-s}. \end{aligned}$$

Cette formule est de nouveau identique au signe près à la formule (2') de 4.3.2.9 . Les mêmes majorations p-adiques sont valables et les opérateurs suivants définissent des opérateurs de $E^{(m+2)}$ et $E'^{(m+2)}$ respectivement :

$$Q_{-l_0'} = p^{\nu_m(-l_0')} \sum_{t=1}^{-l_0'} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{-l_0'}{t} \binom{t-1}{s} (-1)^{t-l_0'} \frac{1}{\pi^{-l_0'-s}} x_i^s \partial_{y_i}^{-l_0'-s-1},$$

et

$$R_{-l_0'} = p^{\nu_m(-l_0')} \frac{(-1)^{-l_0'}}{\pi^{-l_0'}} \partial_{y_i}^{-l_0'},$$

tels que $p^c x_i^{-l_0'} = (\partial_{y_i} + \pi x_i) Q_{l_0'} + R_{l_0'}$. Cette relation peut encore s'écrire :

$$p^{c+1} x_i^{-l_0'} = (\partial_{y_i} x_0' + \pi) p (1/x_0') Q_{l_0'} + p R_{l_0'}.$$

Posons $Q'_{l'_0} = px_iQ_{l'_0}$ et $R'_{l'_0} = pR_{l'_0}$ qui sont des éléments de $E^{(m+2)}$ et de $E'^{(m+2)}$ respectivement. Nous définissons φ et ψ de la façon suivante. Par linéarité, il suffit de définir φ et ψ pour les éléments

$$T_{\underline{l},\underline{k}} = p^{\nu_m(-l'_0)+\nu_m(-l''_0)}\underline{x}'^{\underline{l}'}\underline{y}'^{\underline{l}''}\underline{\partial}_{x'}^{\langle \underline{k}'\rangle(m)}\underline{\partial}_{y'}^{\langle \underline{k}''\rangle(m)}.$$

Si $l'_0 \geq 0$, on pose $\varphi(T_{\underline{l},\underline{k}}) = 0$ et $\psi(T_{\underline{l},\underline{k}}) = p^{c+1}T_{\underline{l},\underline{k}}$,

si $l'_0 < 0$, on pose $\varphi(T_{\underline{l},\underline{k}}) = p^{\nu_m(-l''_0)}Q'_{l'_0}\,\underline{y}'^{\underline{l}''}\underline{\partial}_{x'}^{\langle \underline{k}'\rangle(m)}\underline{\partial}_{y'}^{\langle \underline{k}''\rangle(m)}$, et

$$\psi(T_{\underline{l},\underline{k}}) = p^{\nu_m(-l''_0)}R'_{l'_0}\,\underline{y}'^{\underline{l}''}\underline{\partial}_{x'}^{\langle \underline{k}'\rangle(m)}\underline{\partial}_{y'}^{\langle \underline{k}''\rangle(m)}.$$

Dans E, nous avons alors la relation : $(\partial_{y_i}(x_0/x_i) + \pi)\varphi(Q) + \psi(Q) = p^{(c+1)}Q$. La fin du raisonnement est alors identique à 4.3.2.9 et cela achève le lemme de décomposition.

Rappelons que la notation $\mathcal{E}$ désigne $\mathcal{E}xt^N_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\mathcal{G}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$.

4.4.2.4 Proposition. *(i) Le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module $\rho_*\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{G})$ est cohérent.*

(ii) Sur $\mathcal{W}_{i,j}$, le complexe $S'^\bullet$ indexé de $-N$ à 0, dont le terme général est $S^n = \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)^{\binom{N}{n}}$ (avec une base notée $f_{\underline{i}}$ comme en 4.4.2.1) et dont la différentielle est donnée par

$$d^{-n}(Pf_{\underline{i}}) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}(\partial_{y_{i_l}}x'_0 + \pi x'_{i_l})Pf_{i_1,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_n},$$

est acyclique en degrés non nuls et c'est une résolution de $\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^N(\mathcal{G}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$.

Démonstration. Commençons par le (ii). Posons $E' = \Gamma(\mathcal{W}_{i,j}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty))$ et $E = \Gamma(\mathcal{W}_{i,j}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$. Observons d'abord que le complexe $C^\bullet$ introduit en 4.4.2.1, est quasi-isomorphe sur $\mathcal{W}_{i,j}$ au complexe de Spencer tordu analogue $C'''^\bullet$, construit à partir des opérateurs $\partial_{y_l}x'_0 + x'_l$, en vertu du lemme 4.4.2.2. Notons $S^\bullet$ le complexe $C'''^\bullet$ placé en degrés variant de $-N$ à 0. Le complexe $S^\bullet$ est donc acyclique en degrés différents de 0 et est une résolution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{W}_{i,j}$. Le complexe $S'^\bullet$ est alors un sous-complexe de ce complexe. En particulier, c'est bien un complexe. Il existe une application canonique de S'^0 vers $\mathcal{E}$ qui vient du morphisme de S^0 vers $\mathcal{E}$. Pour voir la surjectivité de $S'^0 \to \mathcal{E}$, il suffit de montrer que tout $P \in E$ s'écrit $P = (\partial_{y_i} + \pi x_i)Q + R$, avec $R \in E'$, ce qui résulte du lemme précédent.

Montrons maintenant qu'on obtient ainsi une résolution de $\mathcal{E}$. Etant donné que le complexe $S^\bullet$ est une résolution de $\mathcal{E}$, il suffit de vérifier que

$$d^{-n-1}(S'^{-n-1}) = S'^{-n} \bigcap d^{-n-1}(S^{-n-1}),$$

où d^{-n} désigne aussi la différentielle de $S^{\bullet}$. Soit $Q \in S^{-n-1}$ tel que $d^{-n-1}(Q) \in S'^{-n}$. Les composantes de Q sont notées $Q_{\underline{l}}$. Chaque composante $Q_{\underline{l}}$ se décompose en $Q_{\underline{l}} = (\partial_{y_i} x'_0 + \pi)R_{\underline{l}} + S_{\underline{l}}$ avec $S_{\underline{l}} \in E'$, d'après le lemme précédent. Introduisons l'élément T de S^{-n-2} défini par :

$$T = \sum_{\underline{l}} R_{\underline{l}} f_i \wedge f_{\underline{l}}.$$

Calculons $d^{-n-2}(T)$:

$$d^{-n-2}(T) \quad = \quad \sum_{\underline{l}} \left((\partial_{y_i} x'_0 + \pi) R_{\underline{l}} f_{\underline{l}} + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j (\partial_{y_j} x'_0 + \pi x'_{l_j}) R_{\underline{l}} f_i \wedge f_{l_1,\ldots,\hat{l_j},\ldots,l_{n+1}} \right).$$

Notons :

$$Q'' = \sum_{\underline{l}} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j (\partial_{y_j} x'_0 + \pi x'_{l_j}) R_{\underline{l}} f_i \wedge f_{l_1,\ldots,\hat{l_j},\ldots,l_{n+1}},$$

et observons que la sommation peut-être restreinte aux multi-indices $\underline{l}$ tels que $i \notin \underline{l}$. L'élément $d^{-n-2}(T)$ s'écrit encore :

$$d^{-n-2}(T) = Q - \sum_{\underline{l}} S_{\underline{l}} f_{\underline{l}} + Q''.$$

Posons $Q' = \sum_{\underline{l}} S_{\underline{l}} f_{\underline{l}} - Q''$, et notons que $d^{-n-1}(Q')$ est égal à $d^{-n-1}(Q)$. Le problème est maintenant de montrer que si $d^{-n-1}(Q') \in S'^{-n}$ alors $Q' \in S'^{-n-1}$. Il est clair que $\sum_{\underline{l}} S_{\underline{l}} f_{\underline{l}} \in S'^{-n-1}$. Finalement nous sommes ramenés à voir que $Q'' \in S'^{-n-1}$, sachant que $d^{-n-1}(Q'') \in S'^{-n}$. Or, nous avons l'égalité :

$$d^{-n-1}(Q'') \quad = \quad (\partial_{y_i} x'_0 + \pi) \sum_{\underline{l}} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j (\partial_{y_i} x'_0 + \pi x'_{l_j}) R_{\underline{l}} f_{l_1,\ldots,\hat{l_j},\ldots,l_{n+1}} + T',$$

où T est un opérateur dont les composantes d'indice ne contenant pas i sont nulles. Finalement la composante sur $f_{l_1,\ldots,\hat{l_j},\ldots,l_{n+1}}$ est $(-1)^j(\partial_{y_i} x'_0 + \pi x'_{l_j})R_{\underline{l}}$ qui est dans E' d'après le (ii) du lemme précédent, si bien que $Q'' \in S'^{-n-1}$, donc aussi Q', ce qui achève la démonstration du (ii).

Par construction, le morphisme canonique $\tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}^{-1} \to \mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathfrak{X}'}^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules. Cet isomorphisme induit donc un isomorphisme $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire :

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathfrak{X}}^{-1} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \tilde{\omega}_{\mathfrak{X}'}^{-1}).$$

La question est maintenant de savoir si cet isomorphisme est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-linéaire, puisque les deux complexes sont des complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-modules à gauche. Cette vérification est locale et on se ramène finalement au cas où $\mathscr{E} = \mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$. Dans ce cas, les deux modules se plongent respectivement dans $j_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}})$ et dans $j_*(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}'}))$. La question se ramène donc à une question sur $\mathscr{W}$, qui est alors claire, puisque en restriction à $\mathscr{W}$, les faisceaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$ et $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$ coïncident. Pour conclure, il suffit de remarquer que le module $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}}\tilde{\omega}^{-1})$ est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent puisque $\mathscr{E}$ est cohérent d'après (ii) et qu'il est isomorphe à $\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}}\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}'}$. Ce complexe étant le complexe qui calcule $\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{G})$, cela montre le (i).

En utilisant que tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-module cohérent admet une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules libres de rang fini, on en déduit immédiatement le corollaire qui suit.

4.4.2.5 Corollaire. *Soit $\mathscr{M}\in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$, alors*

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}p_1^!\mathscr{M})\in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)).$$

Construisons maintenant l'homorphisme : $\mathscr{F}_! \to \mathscr{F}$.

4.4.2.6 Lemme. *Si $\mathscr{M}\in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$, il existe un isomorphisme canonique :*

$$\begin{array}{c}\rho_*\left(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}p_1^!\mathscr{M},\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))\right)\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)}\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\\ \downarrow\\ \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}p_1^!\mathscr{M},\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)).\end{array}$$

La flèche est claire. D'après 3.3.4.1, tout complexe de $D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ admet une résolution par des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules libres. Comme les foncteurs considérés sont way-out, il suffit de montrer l'assertion dans le cas de $\mathscr{M}=\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)$, placé en degré zéro. De plus, il suffit de travailler localement sur un ouvert $\mathscr{W}_{i,j}$. D'après 4.4.2.4, le complexe $S'^\bullet[2-2N]$ calcule $\rho_*\left(\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}p_1^!\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty),\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))\right)$. D'autre part, le complexe $\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}p_1^!\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty),\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ est calculé par le complexe $S^\bullet[2-2N]$. Or, il est évident que $S'^\bullet\otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)}\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\simeq S^\bullet$, d'où le lemme.

4.4.2.7 Proposition. *Il existe un morphisme canonique de foncteurs : $\mathscr{F}_!\to\mathscr{F}$.*

Démonstration. Soient $\mathscr{M}\in D^b_{coh}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty))$ et $\mathscr{G}=\lambda^!\mathscr{L}_\pi\otimes_{\mathscr{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}p_1^!\mathscr{M}$. Il existe un morphisme canonique :

$$\begin{array}{c}\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\mathscr{G},\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)),\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)\right)\\ \downarrow\\ \mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)}(\mathscr{G},\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)),\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\infty)\right).\end{array}$$

Par adjonction, ce dernier complexe est isomorphe à :

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{G},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)\right),$$

et donc encore à

$$\rho_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}\left(\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{G},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)\right),$$

d'après le lemme précédent. En utilisant l'isomorphisme de bidualité, on en déduit finalement une flèche

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{G},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)\right)\to\rho_*\mathcal{G}.$$

Par définition, nous avons l'égalité :

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{X}'}\circ\rho_*\circ\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{G})=\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{G},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))\otimes\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}'},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)\right)\otimes\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}}.$$

La même remarque qu'à la fin de 4.4.2.4 montre que ce dernier complexe est en fait isomorphe au complexe analogue tensorisé non pas par $\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}}$ mais par $\tilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}'}$. On se réfère alors à [19] pour voir que ce complexe est finalement isomorphe à $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)}\left(\rho_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}(\mathcal{G},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)\right)$. Tout cela permet de définir un homomorphisme :

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{X}'}\circ\rho_*\circ\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{G})\simeq\rho_*\mathcal{G},$$

En appliquant p'_{2+} et en composant avec le morphisme de foncteurs $p'_{2+}\circ\rho_*\to p_{2+}$ on trouve le morphisme cherché.

4.4.2.8 Théorème. *Il existe un isomorphisme canonique :* $\mathcal{F}_!\to\mathcal{F}$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{F}_!$ et $\mathcal{F}$ sont deux foncteurs way-out, et que tout complexe de $D^b_{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ admet une résolution par des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules libres de type fini, il suffit de montrer l'énoncé dans le cas où $\mathcal{M}$ est le complexe réduit à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, placé en degré zéro.

Comme le module $\mathcal{E}$ défini en 4.4.2.4 est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, il résulte du théorème de dualité globale (cf 5.6.2 de [19]) qu'il existe un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_!(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)) &= p'_{2+}\mathbf{D}_{\mathfrak{X}'}\rho_*\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}}p_1^!\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)))\\ &\simeq \mathbf{D}_{\mathfrak{Y}}p'_{2+}\rho_*\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathcal{B}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}}p_1^!\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))..\end{aligned}$$

Considérons maintenant les modules $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Sur un ouvert $\mathscr{W}_{i,j}$ dont les coordonnées sont notées $(x'_i)_{1\leq i\leq N}$ et $(y'_i)_{1\leq i\leq N}$, on dispose une résolution $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)$-linéaire (à droite) :

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \rightarrow & \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)^N & \rightarrow & \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty) & \rightarrow & \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) & \rightarrow & 0 \\ & (P_i) & \rightarrow & \sum_i \partial_{x'_i} P_i, & & & & \end{array}$$

où la dernière flèche est : $P \rightarrow 1\cdot P$. On dispose d'une résolution analogue pour $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, de sorte que l'homomorphisme canonique : $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)} \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty) \rightarrow \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est un isomorphisme. Si $\mathscr{M}\in D^b_{coh}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, par la formule d'associativité du produit tensoriel, on en déduit que

$$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbf{Q}}(\infty)}\mathscr{M}\simeq \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)\otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)}\mathscr{M},$$

et finalement que $p_{2+}\mathscr{M}\simeq p'_{2+}\rho_*\mathscr{M}$. Il en résulte l'isomorphisme canonique :

$$\mathscr{F}_!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)) = \mathbf{D}_{\mathfrak{Y}}p_{2+}\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}}p_1^!\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)).$$

Nous avons déjà vu que le complexe $C''^{\bullet}$, introduit en 4.4.2.1, calcule le complexe $\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}p_1^!\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)[2-N])$. Le même raisonnement qu'en 4.3.2.7 montre alors que le complexe $p_{2+}\mathbf{D}_{\mathfrak{X}}(\lambda^!\mathscr{L}_\pi\tilde{\otimes}_{\mathscr{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}}p_1^!\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)[2-N])$ est calculé par le complexe

$$0\rightarrow p_{2*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))^N\rightarrow\ldots\rightarrow p_{2*}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))^{\binom{N}{n}}\rightarrow\ldots\rightarrow p_{2*}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y}\leftarrow\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty)\rightarrow 0,$$

placé en degrés allant de $-2N$ à $-N$. La différentielle d'_n de ce complexe est donnée par

$$d'_n(P\,f_i)=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}P_*(-\partial_{y_l}+\pi x_l)f_{i_1,\ldots,\hat{i}_l,\ldots,i_n}.$$

Toujours comme en 4.3.2.12, en raisonnant avec les opérateurs $T'_l=-\partial_{y_l}+\pi x_l$, on voit que ce complexe est acyclique en degrés différents de $-N$ et que le terme de degré $-N$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-module à gauche isomorphe à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$. En passant au dual, on en déduit que $\mathscr{F}_!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))[2-N]$ est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-module isomorphe à $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$; notons-le $t'(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbf{Q}}(\infty))$. Ce module est placé en degré zéro et l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}_!(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))\rightarrow\mathscr{F}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$, décrit explicitement par les résolutions construites en 4.4.2.4, induit un homomorphisme de modules $t'(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))\rightarrow t(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ (avec la notation introduite à la fin de la démonstration de 4.3.2.14), qui envoie 1 sur 1 et induit un isomorphisme. Ceci achève la démonstration du théorème.

Bibliographie

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique.* Publ. Math. I.H.E.S., **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960–67).

[1] A. Beilinson et J. Bernstein. *Localisation de $\mathscr{G}$-modules.* Comptes-rendus Acad. Sc., **292**, 1, p. 15–18, 1981.

[2] Y. Benoist. *$\mathscr{D}$-modules sur la variété des drapeaux.* Travaux en cours. *Images directes et constructibilité,* Hermann, **46**, p. 99–115, 1993.

[3] P. Berthelot. *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles.* Astérisque, **119-120**, p. 17–49, 1984.

[4] P. Berthelot. *Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules.* Proc. Conf. *p-adic Analysis (Trento 1989),* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1454**, p. 78–124, 1990.

[5] P. Berthelot. *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres.* Manuscrit provisoire, 1991.

[6] P. Berthelot. *$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents I. Opérateurs différentiels de niveau fini.* A paraître aux Annales Scient. E.N.S., Preprint de l'IRMAR, 1993.

[7] P. Berthelot. *$\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents II. Descente par Frobenius.* En cours de rédaction, 1995.

[8] P. Berthelot et A. Ogus. *Notes on Crystalline Cohomology.* Mathematical Notes **21**, Princeton University Press, 1978.

[9] A. Borel et al. *Algebraic $\mathscr{D}$-modules.* Perspectives in Math., Academic Press, **2**, 1987.

[10] S. Bosch, U. Güntzer, et R. Remmert. *Non-archimedean analysis.* Grundlehren des math. Wissenschaften , Springer Verlag, **261**, 1984.

[11] B. Haastert. *Über Differentialoperatoren und D-Moduln in positiver Charakteristik. Manuscripta Mathematica,* **58**, p. 385–415, 1987.

[12] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Lecture Notes in Math. Springer Verlag, **20**, 1966.

[13] R. Hartshorne. *Ample subvarieties of algebraic varieties.* Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, **156**, 1970.

[14] C. Huyghe. *Théorèmes d'acyclicité pour les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques sur l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot.* Preprint de l'IRMAR, 1995.

[15] N. Katz et G. Laumon. *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles.* Pub. Math. I.H.E.S., **62**, p. 361–418, 1986.

[16] N. Koblitz. *p-adic analysis : a short course on recent work.* London Math. Soc. Lecture notes series, Cambridge Univ. Press, **46**, 1980.

[17] B. Malgrange. *Transformation de Fourier géométrique.* Séminaire Bourbaki, **692**, 1987-88.

[18] Z. Mebkhout et L. Narvaez-Macarro. *Sur les coefficients de de Rham - Grothendieck des variétés algébriques.* Proc. Conf. *p-adic Analysis (Trento 1989),* Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **1454**, p. 267–308, 1990.

[19] A. Virrion. *Théorèmes de dualité locale et globale dans la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules.* Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1995.